שימוש בשיטת סימולציות Monte Carlo למידול מחירי מניות וסחורות, רועי פולניצר[1]

מאמר זה הינו השלישי מתוך סדרת מאמרים בנושא VaR של סיכוני שוק. במאמרים אלו נסביר שלב אחר שלב כיצד לחשב את ההפסד הפוטנציאלי המקסימלי הצפוי מתיק השקעות. במאמר זה שני פרקים, הפרק הראשון מתאר בכלליות את שיטת סימולציות Monte Carlo ועושה שימוש בשיטה למידול מחירי מניית גבעות יהש והפרק השני עושה שימוש בשיטת Monte Carlo למידול מחיר חבית נפט עתידי.

פרק ראשון - שימוש בשיטת Monte Carlo למידול מחירי מניית גבעות יהש

1. כללי

סימולציית Monte Carlo הנה שיטה אלגוריתמית לפתרון בעיות חישוביות באמצעות הרצת פרמטרים סטוכסטיים, במספר רב של מצבי עולם וביצוע חישובים על התרחישים השונים אשר התקבלו. מדובר בטכניקה מורכבת המבוססת על הבנה עמוקה בסטטיסטיקה שימוש בשיטה זו נהוג במקרים בהם אין אפשרות דטרמיניסטית למדל את מושא המחקר. כמו כן, השיטה משמשת בדר״כ לאמידת שווי אופציות, ומבוססת על סימולציות של תרחישים שונים מהם נגזרת שווי האופציה הבודדת.

כאמור, שיטה זו מתאימה ביותר למידול מחירי מניות בכלל ומחירי מניית גבעות יהש, מאחר ולמרות והחברה מצאה עתודות נפט בשטחה, ויודעת מהי הכמות המסחרית של הנפט הנמצאת בשטחים השייכים לה הרי שעדיין ישנן שאלות שאין לחברה עליהן כל תשובה, כגון צפי ההכנסות הצפויות (ההכנסות הצפויות כמובן תלויות במחירי הנפט)? ושאלות רבות נוספות. לאמור- החברה נמצאת כרגע רק בתחילתה של דרך חדשה ובפניה עומדים טווח רחב של תרחישים מתרחיש האופטימי ביותר של הצלחה כלכלית מסחררת שתבוא לידי ביטוי בנסיקה חדה במחירה העתידי של מניית גבעות יהש, לעומת תרחיש פסימי של צניחה חדה במחירה העתידי של מניית גבעות יהש וכן כל טווח האפשרויות שבניהם. כמו כן, בשיטה זו ישנו שימוש מצומצם בהנחות עתידיות סובייקטיביות, ובעובדה שהשווי הנגזר (implied value) של מחירה העתידי של מניית גבעות יהש מבוסס על נתוני שוק.

במאמר זה בחרנו בשיטת סימולציות Monte Carlo למידול מחירי מניית גבעות לעשרת הימים הבאים. השיטה המייצרת מספר רב של תרחישים על פי התשואה הצפויה והתנודתיות הצפויה של מחיר מניית גבעות יהש ואשר מתחשבת בלוח מספרים מקריים הבנוי על התפלגות מסוימת שאותה מניחים. כאמור- השיטה לוקחת בחשבון מספר רב של תרחישים שונים, כאשר הערך שנקבע לבסוף הינו ממוצע כלל התרחישים למועד החישוב.

---

[1] כלכלן, בעלים ומנהל משרד שווי פנימי - מעריכי שווי בלתי תלויים. לשעבר מרצה במכללה האקדמית אשקלון בבית הספר לכלכלה בקורסים בניתוח דוחות כספיים והערכות שווי ובמכללת אחווה בפקולטה לניהול בקורסים בנגזרות וניהול סיכונים.

מחירי מניית גבעות יהש הצפויים בשוק, נאמדו באמצעות תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion) של הלוגריתם הטבעי של מחירי מניית גבעות יהש בשוק. מאפייני המודל נאמדו על בסיס נתוני מדגם תצפיות היסטוריות לתשואות מחירי מניית גבעות יהש בשוק על פני העשור שקדם למועד כתיבת המאמר. השתמשנו במודל בסטיית התקן השנתית על ההתפלגות הלוג נורמאלית של התשואות השנתיות של מחירי מניית גבעות יהש. להלן נוסחת החישוב לתהליך הסטוכסטי[2], אשר שימש בעבודתנו:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)=\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\Delta t+\varepsilon\cdot\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\right]$$

כאשר:

$$\mu=r-q;\ \ \varepsilon\approx N(0,1)$$

כאשר:

S_t	*- Price at the future instant t*
S_{t-1}	*- Spot price*
μ	*- Drift*
σ	*- The mean volatility*
ε	*- Random shock to price from t to t+1*
t	*- Time*
r	*- Risk-adjusted discount rate*
q	*- Continuous dividend payout*

[2] "Monte Carlo Simulation of Stochastic Processes" by Morco Antonio Guimaraes Dias, January 2004.

2. **מבחינה כלכלית - תיאורטית**

איש אינו יודע מה יהיה בעתיד והעבר אינו מלמד דבר על מחירי המניות שיתממשו מעתה והלאה. ואכן, אחת מאבני היסוד של תורת המימון היא הנחה פונדמנטלית (שאינה נתונה נתונה לשינוי) שקובעת שמחירי הנכסים הפיננסיים בשוק סובלים מתכונת "חוסר הזיכרון" (Memoryless, תכונה המאפיינת הן משתנים מקריים בדידים המפולגים גיאומטרית והן משתנים מקריים רציפים המפולגים אקספוננציאלית) ולפיכך אין הם יכולים להיות מושפעים ממחיריהם בעבר. משמע, העבר אינו מלמד דבר על העתיד. זוהי הנחת הבסיס למשל, במודל Black-Scholes להערכת שווי אופציות. בהנחה כי טענה זו נכונה, הרי שלא ניתן לדעת אם מניית גבעות יהש מחר, או בעוד שבוע או בעוד חודש או בזמן כלשהו בעתיד יהיה גבוה יותר או נמוך יותר מניית גבעות יהש היום.

הרי למעשה אנו אומרים או מניחים לפיכך, כי קיימת הסתברות של 50% שמחיר מניית גבעות יהש בעוד זמן t מהיום יהיה גבוה יותר ממחיר מניית גבעות יהש היום ובאותה מידה בהסתברות של 50% שמחיר מניית גבעות יהש בעוד זמן t מהיום יהיה נמוך יותר ממחיר מניית גבעות יהש היום. למעשה זוהי הנחה הזהה לזו של הטלת מטבע, "עץ" או "פאלי" (קרי, התפלגות בינומית).

כמובן שיש לכאורה טיעון נוסף שאותו ניתן לטעון והוא שמחיר המניה יהיה בדיוק באותו מקום בעוד זמן t מהיום אך אנו נתעלם כרגע מטיעון זה ונחזק את התעלמותנו בהנחה נוספת של תורת המימון שקרויה תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion) (להלן "**GBM**").

GBM מניח כי מחירים מסוימים הינם בעלי תנודתיות מתמדת שמורכבת משינויים אקראיים (Random Walk, "הילוך מקרי"), בתוספת מגמה מסוימת (Drift, "סחיפה"). משמע, מחירי מניות, מדדי מחירים ושערי חליפין אינם נשארים אף פעם במקום אלא הם נעים ונדים כל הזמן. לגבי שיעורי ריביות ומחירי סחורות נמצא כי הם תמיד חוזרים לתוחלת שלהם ועל כן הם עוקבים תהליך סטוכסטי אחר הנקרא תסוגה לתוחלת (Mean Reversion) של הלוגריתם הטבעי של מחיריהם בשוק. השימוש הנפוץ ביותר של תהליך תסוגה לתוחלת הינו לצורך חיזוי שיעורי ריביות, מאחר ומניחים שישנה ריבית מסוימת שהשוק מתכנס אליה, גם אם הוא לא נמצא שם כרגע. לגבי מחירי סחורות ניתן לראות למשל כי המחיר המיידי (Spot) של תוצרת חקלאית על פי רוב יעלה לפני הקציר וייפול מיד לאחריו. דוגמא נוספת, גז טבעי נוטה להיות יקר יותר בחודשי החורף מאשר בחודשי הקיץ ואז חוזר חלילה.

נחזור לטיעון שהעתיד של מניית גבעות יהש הוא הטלת מטבע עץ או פאלי. הבעיה המרכזית בטיעון זה קשורה לפרמטר אמפירי חשוב ביותר וידוע מאוד שהתנהגות מחירים על פני זמן בשוקי המניות, בשוקי המט״ח או ברוב מדדי שוק (אינדקס) אחרים הינה בצורת התפלגות לוג נורמלית (התפלגות פעמונית א-סימטרית חיובית). תופעה זו מניחה הסתברויות שונות ״ליפול״ על כל מקטע של מחירים, כאשר ההסתברויות הצפופות ביותר מרוכזות באזור המרכז, שהינו בדרך כלל המחיר היום (בהנחה שההתפלגות הינה סימטרית ולצערנו ההתפלגויות הנורמליות בשווקים פעמים רבות אינן סימטריות).

לסיכום, תנועה בראונית גיאומטרית הינה התהליך הסטוכסטי הנפוץ והמקובל ביותר הנמצא בשימוש אודות לפשטותו ולמגוון הרחב של האפליקציות האפשריות הנגזרות ממנו. השימוש הנפוץ ביותר של תנועה בראונית גיאומטרית הינו כאמור חיזוי מחירי מניות אך היא גם משמשת כהנחת הבסיס במודל Black-Scholes ובמודלים הבינומיים והתרינומיים להערכת שווי אופציות.

במאמר זה, לשם הפשטות נניח כי התפלגות תשואות מחירי מניית גבעות יהש היא נורמלית וכל זאת מבלי להיכנס לרווח בר סמך ולדברים מסובכים נוספים.

3. <u>תנועה בראונית גיאומטרית (GBM- Geometric Brownian Motion)</u>

כעת נעבור ליישום של GBM. נתחיל עם סימולציית Monte Carlo בסיסית עבור מניות. המלומד ה״ה פרופ׳ John Hull מסביר בספרו **"Options, Futures, and Other Derivatives"** (המוכר גם כ- ״התנ״ך של הנגזרים״) את התהליך הפופולארי והשכיח ביותר למידול תשואות של מניות או מחירי מניות, הלא הוא GBM. לפיכך, סימולציית Monte Carlo הינה יישום פשוט של GBM. על מנת לראות כיצד מתבצע התהליך נציג נוסחה מתוך ספרו של המלומד ה״ה פרופ׳ John Hull:

$$\ln\left({S_t}\big/{S_{t-1}} \right) \approx \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T , \sigma\sqrt{T} \right]$$

כאשר:

$$\Phi\left(x\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left[-\frac{1}{2} z^2 \right]} dz$$

הנוסחה המונחת לעיל מתארת את GBM, כאשר בצד שמאל של המשוואה מצוי הלוגריתם הטבעי של המחיר של היום מחולק במחיר של אתמול (ניתן לראות שמדובר בתקופה יומית). למעשה לוקחים את הלוגריתם הטבעי של השער בזמן t מחולק בשער בזמן t-1. במילים

אחרות, חישוב התשואה התקופתית של מחירי המניה בתדירות חישוב רציף (Continuously Compounded). למעשה, אנו אומרים שהתשואה התקופתית בחישוב רציף $\ln\left(S_t / S_{t-1}\right)$ מפולגת בקירוב נורמלית $(\approx \Phi)$ עם תוחלת השווה לסחיפה בניכוי מחצית השונות לתקופה מסוימת $\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]$ ועם סטיית תקן השווה למכפלה התנודתיות (סטיית התקן) בשורש הריבועי של תקופה מסוימת $\left(\sigma\sqrt{T}\right)$. הסיבה לכך שהתנודתיות מוכפלת בשורש הריבועי של התקופה ולא בתקופה עצמה, נעוצה בכלל השורש הריבועי לפיו, התנודתיות נמדדת במונחי השורש הריבועי של הזמן.

אם כך, יש לנו תשואה תקופתית בחישוב רציף שבקירוב מפולגת נורמלית. הסיבה לכך שאנו אומרים שהמחירים מפולגים לוג נורמלית, הינה מאחר והלוגריתמים הטבעיים של התשואות מפולגים נורמלית. בהינתן שהלוגריתם הטבעי מפולג נורמלית, הרי שניתן לומר כי המחירים מפולגים לוג נורמלית. לפיכך, ניתן לראות ש- GBM הוא למעשה תהליך דיפוזיה לוג נורמלי.

הנוסחה הבאה שנציג שקולה לנוסחה המצוינת לעיל. נשתמש בנוסחה זו לבניית מודל להתנהגות מחירי מניית גבעות יהש.

$$\ln\left(S_t / S_{t-1}\right) = \alpha + z_t \sigma$$

כמו בנוסחה הקודמת כך גם בנוסחה הנ"ל, בצד שמאל יש לנו את התשואה התקופתית, קרי הלוגריתם הטבעי של המחיר היום מחולק במחיר של אתמול $\ln\left(S_t / S_{t-1}\right)$ שווה לשני רכיבים: הרכיב הדטרמיניסטי (קבוע, ודאי) α ורכיב סטוכסטי (בעל אופי משתנה, אקראי ולא ודאי) $z_t\sigma$. הרכיב הדטרמיניסטי הוא הסחיפה המוזכרת לעיל. כלומר, אנו מצפים שמחיר מניית גבעות יהש "יסחף" כלפי מעלה ועל ידי כך נקבל תשואה צפויה חיובית כלשהי לאורך זמן - וזהו אותו חלק קבוע. אולם יש לנו גם זעזוע מקרי (Random shock) שהוא פונקציה של מכפלת התנודתיות σ ב- z_t, שהוא הרי משתנה מקרי.

למעשה ברגע שהכפלנו את התנודתיות במשתנה המקרי הפכנו את מודל התנהגות שערי מניית גבעות יהש מתהליך דטרמיניסטי לתהליך סטוכסטי.

4. מבחינה מימונית - פרקטית

כעת נעבור ליישום בגיליון האלקטרוני (Excel). נפתח גיליון חדש וננסה למדל את מחירי מניית גבעות יהש באמצעות GBM. תחילה עלינו להניח שלוש הנחות (המסומנות בצהוב בתמונה שלמטה).

(I) ההנחה הראשונה הינה לגבי הסחיפה השנתית או התשואה ההיסטורית השנתית של מחירי מניית גבעות יהש. על פי נתוני אתר הבורסה, להלן תשואות מחירי מניית גבעות יהש לשנים 2000-2010 :

גבעות עולם חיפושי נפט - שותפות מוגבלת (1993)

תאריך	שער נעילה לא מתואם	שינוי שנתי
19/09/2010	12.30	59.3%
31/12/2009	6.80	191.7%
31/12/2008	1.00	0.0%
31/12/2007	1.00	0.0%
31/12/2006	1.00	0.0%
29/12/2005	1.00	-130.8%
30/12/2004	3.70	112.6%
31/12/2003	1.20	8.7%
31/12/2002	1.10	-16.7%
31/12/2001	1.30	0.0%
31/12/2000	1.30	-280.6%
03/01/2000	21.50	
ממוצע		**15.7%**
סטיית תקן		**122.0%**

הממוצע הגיאומטרי של התשואות השנתיות עומד על כ- 15.7%. לאמור- הסחיפה ההיסטורית השנתית של מחירי מניית גבעות יהש הינה כ- 15.7% לשנה.

(II) ההנחה השנייה הינה לגבי התנודתיות (סטיית התקן) ההיסטורית השנתית של מחירי מניית גבעות יהש. על פי נתוני אתר הבורסה, התנודתיות השנתית ההיסטורית של מחירי מניית גבעות יהש עומדת על כ- 122.0%.

(III) ההנחה השלישית הינה המחיר ההתחלתי של מניית גבעות יהש. שער הנעילה של מניית החברה בבורסה לניירות ערך בתל אביב למועד כתיבת המאמר הינו 12.30 אגורות.

כעת עלינו לבצע כמה תיקונים. תחילה נתקן את הסחיפה ההיסטורית לסחיפה ההיסטורית יומית בכך שפשוט נחלק את הסחיפה ההיסטורית השנתית ב- 252 (בהנחה

שישנם 252 ימי מסחר בשנה) וכך בעצם תקננו את הסחיפה ההיסטורית השנתית לסחיפה ההיסטורית היומית.

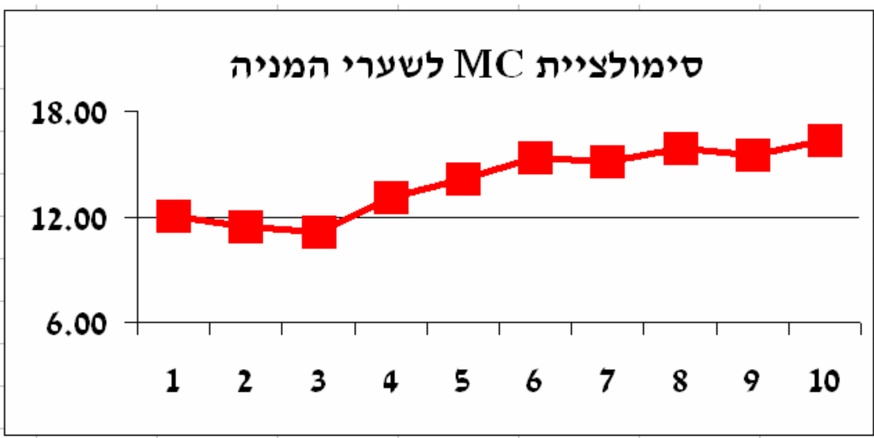
נבצע את אותה הפעולה גם עבור התנודתיות בכך שנחלק את התנודתיות ההיסטורית השנתית בשורש ריבועי של 252 (בהנחה כי ישנם 252 ימי מסחר בשנה). יש לזכור שעל פי כלל השורש הריבועי, התנודתיות נמדדת בשורש הריבועי של הזמן ולא בזמן עצמו.

כעת כל מה שנותר לנו הוא לתקנן את הסחיפה ההיסטורית היומית לתוחלת הסחיפה היומית <u>הצפויה</u> (נזכור: כשמדברים על העתיד מדברים על התוחלת) בכך שנפחית מהראשונה מחצית מהשונות היומית (נזכיר כי השונות היא למעשה התנודתיות בריבוע). לשון אחרת- תוחלת הסחיפה היומית הצפויה סובלת מסחיפות לכיוונים שונים מעצם היותה פונקציה של השונות (קרי, סטיית התקן בריבוע).

למעשה, קיבלנו את שני הדברים שאנו באמת צריכים על מנת למדל את ה- GBM של מחירי מניית גבעות יהש, הלא הם תוחלת הסחיפה היומית הצפויה והתנודתיות היומית הצפויה. כעת נמדל את הרכיבים הללו עבור כל יום. בתרשים ניתן לראות שיש לנו עמודה עבור כל יום.

עמודה B להיום, עמודה C למחר, עמודה D למחרתיים וכך הלאה. התמונה למטה מציגה את התנהגות מחירי מניית גבעות יהש עבור כל יום ויום על פני 10 ימים (בכל פעם שנלחץ על מקש "F9" נקבל גרף חדש, כלומר, המחשב יריץ מסלול חדש למחיר המניה). אם נסתכל על היום הראשון, אזי הדבר הראשון שנרצה לעשות הוא לחשב את ה- z_t המקרי. בתא C20 נרשום את הפונקציה הבאה: "=NORMSINV(RAND())" (ללא המרכאות הכפולות כמובן). מדובר בפונקציה שפוגשים הרבה במימון כמותי. פונקצית ה- RAND() מגרילה לנו משתנה מקרי רציף המפולג אחיד בקטע (0,1) (כל מספר בין 0 ל- 1 אך לא כולל 0 ו- 1 היות ומדובר בהתפלגות אחידה רציפה ולא בדידה) ופונקצית ה- NORMSINV מחזירה את ההופכי להתפלגות הנורמלית הסטנדרטית, כאשר למשתנה מקרי המפולג נורמלית סטנדרטית (קרי, עם תוחלת של 0, וסטיית תקן של 1). בגדול נקבל ערך בין מינוס אינסוף לפלוס אינסוף או ליתר דיוק (ברמת ביטחון של 99.73%) נקבל ערך בין מינוס 3 לפלוס 3. הרציונאל הוא שאנו הופכים את התנודתיות היומית הצפויה מדטרמיניסטית לסטוכסטית ואז ניתן ליישם את הנוסחה שלעיל עבור GBM.

לשם הנוחות, להלן תמונה מתוך קובץ האקסל:



סחיפה (שנתי)	15.70%
תנודתיות (שנתית)	122.00%
סחיפה (יומי)	0.06%
תנודתיות (יומית)	7.69%
סחיפה (תוחלת)	-0.23%
שער התחלתי	12.30

יום	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ערך נורמלי (0,1)		-0.25	-0.60	-0.40	2.19	1.02	1.10	-0.16	0.65
הלוגריתם הטבעי של התשואה		-0.02	-0.05	-0.03	0.17	0.08	0.08	-0.01	0.05
שער המניה (t)	12.30	12.04	11.47	11.10	13.10	14.14	15.35	15.13	15.87

בתא C21 נכתוב "=drift+vol*z". כלומר, מחיר מניית גבעות יהש יהיה פונקציה של drift (קרי, תוחלת הסחיפה היומית הצפויה) בתוספת המכפלה של vol (קרי, התנודתיות היומית הצפויה) ב- z_t האקראי שכרגע חושב בתא C20 (קרי, אם היינו מסתפקים רק בתוחלת הסחיפה היומית הצפויה הרי שהיינו מקבלים גרף עם שיפוע חיובי). המכפלה המתוארת לעיל גורמת לתנודתיות להיות סטוכסטית (אקראית), כלומר סחיפה קבועה (אם תירצו מגמה ידועה) בתוספת זעזוע מקרי כפונקציה של התנודתיות – מה שנותן לנו את הלוגריתם הטבעי של התשואה.

בתא C22 אנו כופלים את המחיר ההתחלתי של מניית גבעות יהש היום (12.30 אגורות), ב- e (קרי, פונקציה מעריכית) בחזקת התשואה או בפונקציה המעריכית של התשואה. זה נותן לנו את מחיר מניית גבעות יהש ביום שלמחרת.

ביום שלמחרת, נעשה את אותו הדבר בתא D22. נחשב את הלוגריתם הטבעי של התשואה, ניקח את מחיר מניית גבעות יהש של יום קודם ונכפול אותו בפונקציה המעריכית של הלוגריתם הטבעי של התשואה. בדרך זו אנו מקבלים בכל יום מחיר מניה חדש שהוא פונקציה של מחיר המניה ביום הקודם והוא כמובן אקראי, מכיוון שיש לנו את המשתנים האקראיים בשורה 20, שמשתנים כל הזמן.

כאשר נקיש על מקש "F9" כל פעם על מנת לחשב מחדש, נקבל סדרה חדשה המבוססת על GBM עבור מודל מחירי מניית גבעות יהש. למעשה זו היא סימולציית Monte Carlo.

פרק שני - שימוש בשיטת Monte Carlo למידול מחיר חבית נפט עתידי

1. **חיזוי מחיר חבית נפט עתידי**

חיזוי מחיר חבית נפט עתידי נעשה על סמך שיטה מקובלת המניחה התנהגות של מהלך מקרי (Random Walk) של מחירי חבית נפט המבוסס על תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion).

לדעתנו, שיטה זו הינה השיטה המתאימה ביותר למחיר חבית הנפט, מאחר והונחנו על ידי בעלי האתר כי השנה הראשונה של פעילות מייצגת עבור החברה (קרי, פעילות הכוללת הכנסות נורמטיביות אך ורק מהנפט שנתגלה בשטח הקידוח שלה) היא שנת 2012 (2.25 שנים ממועד ההערכה), מה שאומר שבפני מחיר חבית נפט עתידי עומדים טווח רחב של תרחישים החל מתרחיש האופטימי ביותר של נסיקה חדה במחירו, לעומת תרחיש פסימי של צניחה חדה במחירו וכן כל טווח האפשרויות שבניהם. כמו כן, בשיטת זו, ישנו שימוש מצומצם בהנחות עתידיות סובייקטיביות, ובעובדה שהשווי הנגזר (implied value) של מחיר חבית נפט עתידי מבוסס על נתוני שוק.

לצורך יישום השיטה, בחרנו בסימולציית Monte Carlo המייצרת מספר רב של תרחישים על פי התנודתיות הצפויה של מחירי חבית נפט ואשר יכולה להתחשב בריבית חסרת הסיכון המתאימה למטבע שבו נקוב מחיר חבית נפט וכן בלוח מספרים מקריים הבנוי על התפלגות נורמלית שאותה אנו מניחים בעבודתנו.

2. **שלבי החישוב**

- הצבת מחיר חבית נפט נוכחי – 82.32 דולר (כמתואר בסעיף 1.2);
- יצירת 5,000 תרחישים אשר משקפים מחירים עתידיים של חבית נפט (בעזרת סימולציית Monte Carlo) בהתבסס על ה- Geometric Brownian motion בהנחת מהלך מקרי (Random walk) של מחירי חבית נפט[3];
- קביעת מחיר חבית נפט עתידי, ע״פ ממוצע כל 5,000 התרחישים.

על מנת לחזות את מחיר חבית נפט עתידי (״S״) באמצעות סימולציית Monte Carlo, השתמשנו במתודולוגיה מקובלת של שינוי מקרי של מחירי חבית נפט (random walk of oil prices) על בסיס Geometric Brownian Motion.

---

[3] הנחת בסיס במודל בלק ושולס.

על מנת לחשב את S בזמן עתידי t+1 (**S_{t+1}**) התבססתי על ההנחות הבאות:

$$S_{t+1} = S_t * \exp\left[\left(R_F - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t + z * \sigma * \sqrt{\Delta t}\right]$$

כאשר:

S_t – הינו מחיר חבית נפט בזמן t (תאריך ההערכה),

σ – הינה התנודתיות בשינוי ערכי S,

R_F – הינו שיעור הריבית חסרת סיכון,

Z – משתנה מקרי המפולג נורמלית סטנדרטית עם תוחלת של 0 וסטיית תקן של 1.0.

Δt – הינו הזמן בין מועד ההערכה לתאריך הצפוי.

הרצנו 5,000 סימולציות של מחירים עתידיים של חבית נפט בהתבסס על 5,000 משתנים מקריים המפולגים נורמלית סטנדרטית.

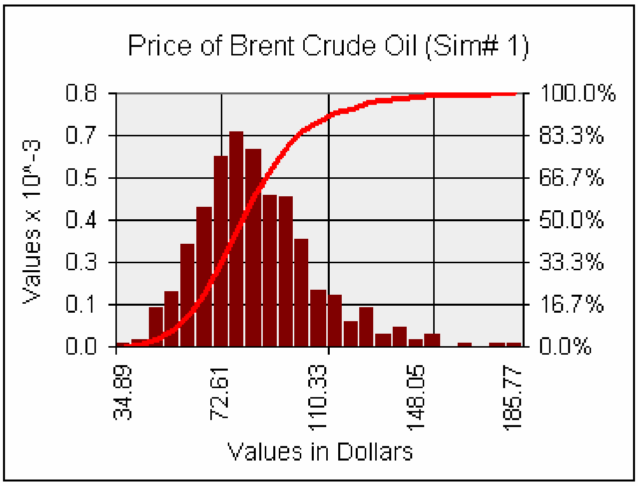
3. הנחות

- **מועד ההערכה** – יום 30 בספטמבר 2010.
- **זמן התחזית** – 2.25 שנים (סוף 2012). בעבודתנו הנחנו כי השנה הראשונה של פעילות מייצגת עבור החברה (קרי, פעילות הכוללת הכנסות נורמטיביות אך ורק מהנפט שנתגלה בשטח הקידוח שלה) היא שנת 2012.
- **שווי נכס הבסיס** – 82.32 דולר ארה״ב, בהתבסס על מחיר חבית נפט מסוג Brent Crude Oil למועד ההערכה.
- **ריבית חסרת סיכון** – 0.48%. מחיר חבית נפט נקוב בדולר ארה״ב לפיכך נלקחה ריבית חסרת הסיכון (**R_F**) המתבססת על ממוצע תשואות לפדיון של אג״ח ממשלת ארה״ב (מקור: *U.S. Department of the Treasury*) לתקופה בהתאם לזמן התחזית.
- **תנודתיות צפויה** – 17.09% בהתבסס על סטיית התקן של מחירי חבית נפט.

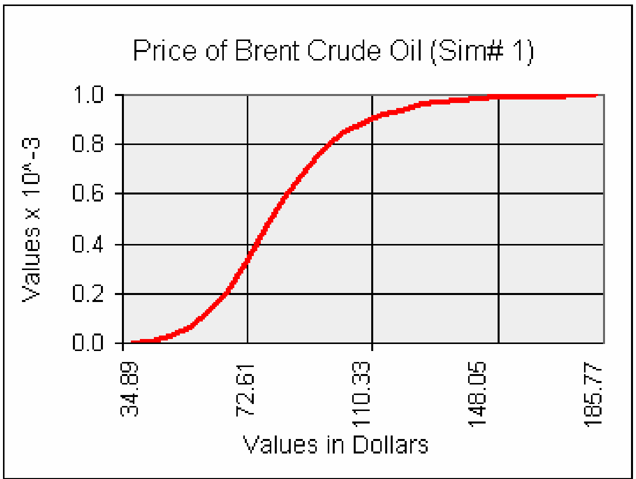
להלן תמצית סימולציית MC למחיר חבית נפט עתידי:

Output Report for Price of Brent Crude Oil (Sim# 1)

Performed By: Roi Polanitzer
Date: Friday, October 1, 2010 2:19:21 AM



Price of Brent Crude Oil (Sim#1)	
Minimum	34.89
Maximum	185.77
Mean	83.34
Std Dev	22.38
Values	5000



Price of Brent Crude Oil (Sim#1)	
Minimum	34.89
Maximum	185.77
Mean	83.34
Std Dev	22.38
Values	5000

Simulation Summary Information	
Workbook Name	BCO 0910 MC Simulations.xls
Number of Simulations	1
Number of Iterations	5000
Number of Inputs	4
Number of Outputs	9
Sampling Type	Latin Hypercube
Simulation Start Time	1/10/10 2:19:14
Simulation Duration	00:00:02
Random # Generator	Mersenne Twister
Random Seed	1629562571

Summary Statistics for Price of Brent Crude Oil

Statistics		Percentile	
Minimum	34.89	5%	51.17
Maximum	185.77	10%	58.13
Mean	83.34	15%	62.58
Std Dev	22.38	20%	65.75
Variance	500.90	25%	68.05
Skewness	0.917701791	30%	70.50
Kurtosis	1.581073893	35%	73.30
Median	80.51	40%	76.06
Mode	65.32	45%	77.96
Left X	51.17	50%	80.51
Left P	5%	55%	83.15
Right X	126.69	60%	85.23
Right P	95%	65%	88.43
Diff X	75.52	70%	91.95
Diff P	90%	75%	95.26
#Errors	0	80%	98.59
Filter Min	Off	85%	103.59
Filter Max	Off	90%	111.51
#Filtered	0	95%	126.69

Inputs Information for Price of Brent Crude Oil

Name	Number
Asset Price	82.32
Risk Free Rate (%)	0.48%
Cost of Carry Rate (%)	0.00%
Volatility (%)	17.09%
Maturity (yrs)	2.25

4. תוצאות

להלן הטבלה המציגה את תוצאות תחזית מחיר חבית נפט עתידי:

סוג הנכס הפיננסי	מחיר עתידי
חבית נפט מסוג Brent Crude Oil	$83.34