16 בינואר 2014

אמידת ההסתברות לחדלות פירעון באמצעות מודל KMV-Merton, רועי פולניצר[1]

במאמר זה, נציג את הרעיון והמבנה של מודל KMV-Merton ושל מודל Moody's-KMV, נסביר כמה תנאים לפני שניישם את שני המודלים האמורים - נרחיב את מודל Merton למקרה מיוחד של שני סוגים של חוב. לבסוף, נשתמש בנתונים אמיתיים על מנת לבחון את ההסתברות לחדלות פירעון של כמה פירמות בעלות תנאים פיננסיים שונים משלושה ענפים שונים, ונצפה לקבל כמה תובנות בקשר לתוצאות שיתקבלו.

1. הקדמה

סיכון אשראי הוא הסיכון לכך שחייב כלשהו לא יוכל לעמוד בהחזרי החוב (repayments) שלו. לכישלון בעמידה בהחזרי חוב עשויים להיות כמה השלכות. במאמר זה, נתמקד בעיקר בסיכון האשראי של הפירמה. סיכון האשראי של הפירמה מכונה לעתים קרובות סיכון חדלות הפירעון (default) של הפירמה, ואכן שני המונחים משמשים כמילים נרדפות במאמר זה. חדלות הפירעון של הפירמה מזוהה על פי רוב עם פשיטת הרגל (bankruptcy) של הפירמה. עם זאת, זהו רק אחד מבין כמה אירועי אשראי[2]. אנו מתעניינים באירוע אשראי שבו, הפירמה לא מצליחה לעמוד בהחזרי החוב שלה. למרות, שחדלות הפירעון של הפירמה היא אירוע נדיר, ברגע שהיא מתרחשת יגרמו לפירמה הפסדים משמעותיים, ואכן אין שום דרך להבחין באופן חד משמעי בין פירמות שיגיעו למצב של חדלות פירעון לבין אלו שלא, בטרם אירוע חדלות הפירעון. כתוצאה מכך, פירמות ופרטים בודדים רבים מקדישים תשומת לב רבה למידול סיכוני אשראי של פירמות ציבוריות. למען האמת, סוכנויות דירוג[3] האשראי כמו למשל Standard and Poor's, Fitch ו- Moody's נולדו למטרה זו. הפונקציות העיקריות שסוכנויות דירוג אלו ממלאות הינן דומות: הערכת תחזית (Outlook) סיכון האשראי של חברות ופרטים בודדים והקצאת דירוגי אשראי.

מידול כמותי של סיכוני אשראי הפך כיום לנושא נרחב, בעיקר בעקבות חדשנותם של נגזרי אשראי ומכשירי חוב של הפירמה. בשל כך, אנשי אקדמיה ואנשי מקצוע רבים מגלים עניין רב במודלים לחיזוי סיכוני האשראי של הפירמה. אחד היישומים העיקריים המצוי בשימוש נרחב הוא זה של Merton (ראה [1]). חברת KMV[4], המתמחה בניתוח סיכוני אשראי, שיכללהושיפרה את מודל Merton והציגה מודל הנקרא KMV-Merton המשתמש במסגרת של מודל Merton, לפיה שווי ההון העצמי של הפירמה הינו

---

[1] מחזיק בהסמכה בינלאומית בניהול סיכונים פיננסיים (FRM- Financial Risk Manager) מהאיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP- Global Association of Risk Professionals), בהסמכה ישראלית בניהול סיכונים (CRM- Certified Risk Manager) מהאיגוד הישראלי למנהלי סיכונים (IARM- Israeli Association of Risk Managers). בעלים של משרד שווי פנימי – ייעוץ והדרכה ומרצה בסניף האקדמי של GARP ישראל.

[2] פירוט מלא של אירועי האשראי חורג ממסגרת עבודה זו. הסבר מלא ניתן למצוא באתר האינטרנט של האיגוד הבינלאומי לניירות ערך ונגזרים (ISDA- the International Securities and Derivatives Association).

[3] דירוג הסיכון לחדלות פירעון על ידי מנפיק איגרת החוב. בארץ נעשה הדירוג ע"י חברת מעלות או חברת מידרוג. סולם הדירוג נע בין D ל- AAA, כאשר AAA, משמעותו, שאיגרת החוב בעלת רמת הסיכון הנמוכה ביותר ו- D משמעותו, שאיגרת החוב בעלת רמת הסיכון הגבוהה ביותר. בארץ הדירוג מוזמן ע"י המדורג, הדירוג "מתוחזק" עד פירעון האיגרת ומתייחס לאיגרת החוב ולא לחייב.

[4] בשנת 2002 חברת הדירוג Moody's השלימה את רכישת חברת KMV. חברת KMV נקראת היום Moody's KMV.

אופציית[5] רכש[6] (call) על שווי נכסי הפירמה עם מחיר המימוש השווה לערך הנקוב של חוב הפירמה, אך בהתבסס על כמה הנחות מפשטות בנוגע למבנה ההון של הפירמה. במודל KMV-Merton, המתודולוגיה משתמשת בשווי ההון העצמי (אשר הינו מחיר מצוטט בשוק פעיל), בתנודתיות ההון העצמי (אשר הינה נתון המשתמע באופן ישיר מנתוני שוק הנצפים באופן ישיר) ובעוד כמה פרמטרים נצפים (observable) אחרים על מנת לקבל את שווי נכסי הפירמה ואת תנודתיות שווי נכסי הפירמה, אשר שניהם אינם נצפים. לאחר קבלת שני האומדנים הללו, מודל KMV-Merton מיישם את ההנחה כי שווי הפירמה עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion) על מנת לקבוע את ההסתברות לחדלות פירעון של הפירמה.

מודל Merton הוא אבן היסוד של מידול סיכוני אשראי. חברת KMV משתמשת, בחוכמה, ביישום זה לצורך חיזוי סיכון האשראי של הפירמה. עם זאת, נשאלת השאלה כמה טובה כבר יכולה להיות יכולת החיזוי של חברת KMV כאשר היא מיישמת את מודל Merton הנשען על ההנחות המפשטות שלו? הרי בפועל, הנחות מפשטות אלו אינן מציאותיות. חברת KMV איננה מסתמכת אך ורק על הנחות אלו. מייסדי KMV, Oldrich Vasicek ו- Stephen Kealhofer פיתחו מודל חדש הנקרא מודל Vasicek-Kealhofer (להלן "מודל Moody's-KMV") (ראה [2]) שבשלב הראשון מעריך את "המרחק לחדלות פירעון", לאמור ה- DD של פירמה בודדת (Distance-to-Default) ובשלב השני משתמש במסד נתונים קנייני אודות פירמות בארה"ב לצורך המרת ה- DD ל"תוחלת שכיחות חדלות הפירעון", לאמור ה- EDF של הפירמה (Expected Default Frequency).

אנשי מקצוע רבים מבצעים מחקרים על מודל Moody's-KMV, פעם אחת במטרה לבחון את דיוק המודל ופעם שניה על מנת לחפש דרכים נוספות לשפר ולשכלל אותו. Crosbie and Bohn (ראו [3]) הציגו את מודל Moody's-KMV לאחר שתיקננו את ההנחות שלו ויישמו גרסה נוספת של מודל Merton לחישוב שווי השוק והתנודתיות של נכסי הפירמה מתוך שווי ההון העצמי וכל זאת על מנת לשפר את דיוק המרחק לחדלות פירעון. Kealhofer and Kurbat (ראו [4]) הצליחו לשחזר את תוצאות המחקר של Moody's שקבעו כי מודל Moody's-KMV תופס יותר מידע ומגיב מהר יותר בהשוואה למתודולוגיות המסורתיות של סוכנויות דירוג האשראי. פרט לאנשי מקצוע אלו, חוקרים רבים מתעניינים גם הם במתודולוגיית Moody's-KMV. Bharath and Shumway (ראו [5]) בוחנים את הדיוק והתרומה של מודל KMV-Merton על ידי בניית "ההסתברות" האלטרנטיבית הנאיבית שלו. לפיכך, אנו מבקשים להבין כיצד "המרחק לחדלות פירעון" קשור לכמה גורמים נצפים, וכיצד ניתן לשפר את המתודולוגיה.

---

[5] חוזה המקנה למחזיק בו זכות אך לא חובה לרכישה או מכירה של נכס מסוים בכמות, מחיר ותאריך מוסכם.אופציית רכש (CALL) מקנה זכות לרכוש הנכס. אופציית מכר (PUT) מקנה הזכות למכור הנכס.

[6] הסכם בין שני צדדים לפיו צד אחד מקנה לצד השני תמורת תשלום זכות, שאיננה חובה, לקנות ממנו נכס מסוים במחיר, זמן וכמות קבועים מראש.

המשך המאמר בנוי כדלקמן: חלק 2 סוקר בקצרה את הספרות לגבי גזירת משוואת Merton, מודלים לחדלות פירעון של פירמה המבוססים על הון עצמי בכלל ומודל Merton ו- Moody's-KMV בפרט. חלק 3 מציג כיצד ניתן להרחיב את מודל Merton למקרה פרטי. חלק 4 מתאר כיצד ניתן לבדוק את המודל באמצעות נתונים אודות פירמות בישראל. סעיף 5 מסכם.

2. **<u>מודלים לחיזוי חדלות פירעון</u>**

Merton הרחיב את עבודתם של Black and Scholes (ראה [6]) על תיאורית תמחור האופציות לצורך חיזוי חדלות הפירעון של הפירמה, באמצעות כמה הנחות חזקות. בסוף שנות ה- 80 של המאה ה- 20, חברת KMV פיתחה ושיכללה את מודל Merton לחיזוי חדלות הפירעון של הפירמה באמצעות מודל הנקרא KMV-Merton. מודל זה מסתמך על הרעיון שניתן לראות בהונה העצמי של הפירמה כאופציית ונילה אירופאית על שווי נכסי הפירמה לאופק זמן מסוים. מאוחר יותר, Oldrich Vasicek ו- Stephen Kealhofer הרחיבו את מודל Black-Scholes-Merton במטרה לייצר מודל של הסתברות לחדלות פירעון באמצעות מודל Vasicek-Kealhofer (להלן "מודל VK"). מודל זה מניח שניתן להסתכל על הונה העצמי של הפירמה כעל אופציית חסם לנצח (perpetual barrier option) על שווי נכסי הפירמה לאופק זמן מסוים. ברגע ששווי נכסי הפירמה נופל מתחת לרמת סף כלשהי, הנקראת נקודת חדלות הפירעון (DP), בתום אופק הזמן או לפני כן, הפירמה מגיעה מייד למצב של חדלות פירעון. מאחר ומודל זה הוכיח את עצמו פעמים רבות בחיזוי חדלויות פירעון בשוק האמריקאי, החליטה סוכנות הדירוג Moody's ליישמו; ועל כן הוא נקרא כיום מודל Moody's-KMV. מודל Moody's-KMV משתמש במסד הנתונים הנתונים הסטטיסטיים הגדול של חברת Moody's המבוסס על תצפיות עבר בנוגע לשיעורי Default, על מנת לאמוד את ההתפלגות האמפירית של השינויים במרחק לחדלות פירעון, ומחשב את ההסתברויות לחדלות פירעון בהתבסס על התפלגות זו (ראה [5]). הסתברות חדלות פירעון זו ידועה בשם "תוחלת שכיחות חדלות הפירעון" EDF (ראה [7]), והיא למעשה ייחודית לפירמה (firm-specific). בשל מאפייניה המסחריים של Moody's, היישום מודל Moody's-KMV הפך לסוד המסחרי.

א. **<u>מודל Merton (1974)</u>**

בשנת 1974 Merton הציע מודל, המבוסס על תיאורית תמחור האופציות של Black-Scholes (ראה [6]) בשל "המשתנים הנצפים" של הפונקציה הסופית, במטרה להעריך את סיכון האשראי של הפירמה. המודל קושר את סיכון האשראי למבנה ההון של הפירמה. מודל זה הוא אולי התרומה המשמעותית ביותר לתחום מחקר סיכוני האשראי. בהסתמך על כמה הנחה מפשטות, המודל מניח כי ההון העצמי של הפירמה הינו לא פחות מאופציית רכש (call) על שווי נכסי הפירמה. מתובנה זו, ניתן למעשה לגזור גם את שווי החוב מתוך שווי ההון העצמי. תיאור של מודל זה יוצג בסעיף הבא.

1) **הנחות**

מודל Merton מניח כמה הנחות על מנת לפתח את משוואת Black-Scholes (ראו [6]).
אנחנו מסווגים את ההנחות הללו לארבעה חלקים.

א) **חוב**

הפירמה הנפיקה (issued) רק סוג אחד (הומוגני ובודד) של איגרת חוב[7] הנפדית בזמן T. הפירמה מבטיחה לשלם את איגרת החוב למחזיק איגרת החוב במועד הפדיון T.

ב) **מבנה הון**

במודל Merton, מונח פשוט כי הפירמה הינה ציבורית[8] והיא ממומנת באמצעות חוב והון עצמי, כך שהמאזן שלה נראה כך:

	נכסים	התחייבויות
	שווי הפירמה: $F(t)$	חוב: $C(F,t)$
		הון עצמי: $E(F,t)$
סה"כ	$F(t)$	$F(t)$

תרשים 1: מאזן הפירמה של Merton

באופן טבעי, מהזהות החשבונאית, נקבל ש-:

$$F(t) = C(F,t) + E(F,t) \qquad (1)$$

הערה: קודם לפירעון החוב, הפירמה איננה יכולה להנפיק חוב חדש (זוטר יותר, באותה רמת בכירות או בכיר יותר) או לבצע רכישה עצמית (repurchase) של מניות הפירמה.

ג) **הדינמיקה של שווי נכסי הפירמה**

המודל מניח שנכסי הפירמה הינם נכסים סחירים, וכי הם עוקבים תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion) על מרחב ההסתברות (Ω, F, P) כדלקמן:

---

[7] אגרת חוב - שטר המונפק ע"י ממשלות ופירמות אשר בו מתחייב המנפיק כלפי אוחז השטר לתשלום קרן וריבית בתנאים ומועדים הנקובים בשטר. בארץ קיימים בשוק אג"ח שקלי, צמוד מדד ומט"ח.

[8] מתייחס לפירמה שאושר לה להציע את ניירות הערך הרשומים שלה למכירה לציבור רחב.

(2) $$dF = \mu_F F dt + \sigma_F F dW$$

כאשר μ_F ו- σ_F הם תוחלת התשואה על הפירמה והתנודתיות של הפירמה, בהתאמה, dW הוא תהליך וינר סטנדרטי ו- $W \sim N(0,t)$. $F(t)$ מפולג לוג-נורמלי כאשר תוחלת השווי שלו בזמן t, הינה:

(3) $$F(t) = F(0)\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t + \sigma_F\sqrt{tW_t}\right\}$$

ד) **שוק מושלם**

בהנחה זו, המודל מתעלם למעשה מתשלומי הקופון והדיבידנד[9] וממסים. אין קנס על מכירה בחסר[10]. השוק נזיל לחלוטין; המשקיעים יכולים לרכוש או למכור כל נכס במחיר השוק הרצוי. הלוואות ופיקדונות מגלמים אותו שיעור ריבית חסרת סיכון, וריבית זו קבועה וידועה על פני אופק הזמן. הנחות אלו אינן מפרות את ניסוחי המודל; הן מתוארות רק לשם הנוחות.

2) **הגדרה**

בעקבות הגזירה של Black-Scholes, אנו מניחים כי $Y_1 = V_1(F(t),t)$ ו- $Y_2 = V_2(F(t),t)$ הן שתי פונקציות של השווי והזמן. באמצעות הלמה של איטו (Ito's Lemma) (ראו [8]), נקבל ש-:

(4) $$dY_i = \frac{\partial V_i}{\partial F}dF + \frac{\partial V_i}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial F^2}(dF)^2 ...$$

כאשר $i = 1,2$ ו- $F = F(t)$. מאחר ונכסי הפירמה עוקבים תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion), אזי $(dF)^2 = \sigma_F^2 F^2 dt$, ואם נסדר מחדש את משוואה (4), נקבל ש-:

(5) $$dY_i = \frac{\partial V_i}{\partial F}dF + \frac{\partial V_i}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2\frac{\partial^2 V_i}{\partial F^2}dt$$

---

[9] תשלום שמחולק בין בעלי המניות (לעיתים מבוטא באחוזים ל - 1 ₪ ערך נקוב).

[10] מכירת ני"ע שאינן בבעלות המוכר, אלא בבעלות חבר הבורסה המשאיל אותן למוכר, היא מאפשרת למוכר לנצל את ירידת השער להשגת רווח. בארץ מכירה בחסר מקובלת בעיקר בשוק האופציות.

על ידי בחירת תיק המורכב מ- Y_1 ו- Y_2, התיק המתאים כולל פוזיציית יתר (long) בסכום של שווי Y_1 ופוזיציית חסר (short) בסכום של ΔY_2. נגדיר Π כשווי התיק ונקבל ש- :

$$\Pi = Y_1 - \Delta Y_2 \tag{6}$$

נציב את משוואות (2) ו- (5) בתוך משוואה (6), ונקבל ש- :

$$\begin{aligned} d\Pi = &\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial F^2} + \mu_F F \frac{\partial V_1}{\partial F}\right)dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial F^2} + \mu_F F \frac{\partial V_2}{\partial F}\right)dt \\ &+ \left(\sigma_F F \frac{\partial V_1}{\partial F} - \Delta \frac{\partial V_2}{\partial F}\right)dW \end{aligned} \tag{7}$$

על מנת להבטיח כי התיק הינו חסר סיכון במהלך הזמן dt, ניקח $\Delta = \frac{\partial V_1 / \partial F}{\partial V_2 / \partial F}$. בהיעדר ארביטראז'[11], שווי התיק עוקב תהליך :

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{8}$$

כאשר r הינו שיעור הריבית חסרת הסיכון.

על ידי השוואת משוואה (7) ל משוואה (8), נקבל ש- :

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial F^2}\right)dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial F^2}\right)dt = r\Pi dt = r\left(V_1 - \Delta V_2 dt\right) \tag{9}$$

נסדר מחדש את איברי המשוואה ונקבל ש- :

$$\frac{\dfrac{\partial V_1}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial F^2} - rV_1}{\dfrac{\partial V_1}{\partial F}} = \frac{\dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial F^2} - rV_2}{\dfrac{\partial V_2}{\partial F}} \tag{10}$$

[11] מצב בו נוצר למשקיע רווח ללא כל סיכון. רכישה ומכירה של נכס פיננסי בשני שווקים שונים, במחירים שונים, תוך ניצול הפרשי שער זמניים. וכן מצב שבו שני ני"ע של אותה חברה כמו כתב אופציה, או אג"ח להמרה לעומת המניה, נסחרים במחירים כך שפעילות בני"ע הללו תיצור רווח מידי וללא סיכון למשקיע.

שני הצדדים שווים לפונקציית ארביטראז' של F ו- t, היות וזה תקף עבור כל שתי פונקציות $V_1(F,t)$ ו- $V_2(F,t)$. נגיד שפונקציית הארביטראז' הינה $\alpha(F,t)$. אזי עבור כל פונקציה $Y=V(F,t)$, נקבל ש-:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_F^2F^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}-rV-\alpha(F,t)\frac{\partial V}{\partial F}=0 \qquad (11)$$

אז נבחר $\alpha(F,t)=(\sigma_F\lambda-\mu_F)F$, כאשר $\lambda=\lambda(F,t)$ הינו מחיר השוק של הסיכון. כעת ניתן לכתוב מחדש את משוואה (11) ונקבל ש-:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_F^2F^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}-rV-(\sigma_F\lambda-\mu_F)F\frac{\partial V}{\partial F}=0 \qquad (12)$$

מאחר ונכסי הפירמה הינם סחירים, נכסי הפירמה הם הפתרון למשוואה (12), כך שנקבל $(\mu_F-\sigma_F\lambda)V-rV=0$. לפיכך, $\lambda=\frac{\mu-r}{\sigma}$ הינו מחיר השוק של הסיכון. על ידי פישוט האיברים, אנו יכולים לצמצם את משוואה (12) לכדי:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_F^2F^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}-rV+rF\frac{\partial V}{\partial F}=0 \qquad (13)$$

זוהי משוואת Black-Scholes-Merton והיא נכונה עבור כל הון עצמי ששוויו הוא פונקציה של ששווי הפירמה והזמן.

3) <u>מאפיין האופציה של ההון העצמי</u>

על פי חוק החברות, במועד פירעון החוב, מחזיקי איגרות החוב יקבלו את החוב שלהם במלואו; מחזיקי המניות לעומתם יקבלו את היתר (residual, השארית). ברם, באירוע שבו החייב אינו יכול לעמוד בתשלום החוב, מחזיקי איגרות החוב ישתלטו על הנכסים הנותרים של הפירמה ומחזיקי המניות לא יקבלו דבר.

לפיכך, ניתן לראות כי שווי ההון העצמי $E(F,t)$ שקול אפקטיבית, מכל הבחינות המהותיות, לאופציית רכש (call) על שווי נכסי הפירמה $F(t)$ עם מחיר מימוש השווה לערך הנקוב D של החוב במועד פדיון החוב T, וניתן לרשום זאת כ-:

$$Equity\ \ Value\ \ E(F,t)=\max[F(t)-D,0] \qquad (14)$$

במועד פדיון החוב T, אם שווי נכסי הפירמה גבוה מהחוב, נממש את האופציה לקבל תזרים מזומנים (payoff) של $F(t)-D$; אחרת, לא נקבל כלום. על ידי בדיקת מבנה ההון, שווי החוב הוא הנמוך מבין שווי נכסי הפירמה והחוב, והוא שקול אפקטיבית, מכל הבחינות המהותיות, לשווי החוב בניכוי שווי אופציית המכר[12] (put) על שווי נכסי הפירמה עם מחיר מימוש השווה לערך הנקוב D של חוב הפירמה במועד פדיון החוב T. פעם נוספת, ניתן לרשום זאת כ-:

$$Debt\ Value\ \ C(F,t)=\min[F(t),D]=D-\max[D-F(t)] \tag{15}$$

במקרה שגם ההון העצמי וגם החוב סחירים, ניתן לרשום מחדש את משוואה (13) עבור שני המקרים על ידי רישום $V_1=C(F,t)$ ו- $V_2=E(F,t)$.

4) **תוצאת Merton**

בשל מאפיין האופציה הן של ההון העצמי והן של החוב, Merton טוען שאנחנו יכולים להרחיב את מודל Black-Scholes[13] לתמחור אופציות הן למקרה של הון עצמי והן למקרה של חוב, ולרשום את הפיתרון למשוואות (14) ו- (15) באופן ישיר. על פי תורת תמחור האופציות, נקבל ש-:

$$\begin{aligned} E(F,t) &= F(t)N(d_1)-e^{-(T-t)}DN(d_2) \\ d_{1,2} &= \frac{\ln(F(t)/D)\pm\left(r-\frac{1}{2}\sigma_F^2\right)(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}} \end{aligned} \tag{16}$$

כאשר $N(\cdot)$ היא ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.

ממשוואה (15) וממבנה ההון $C(F,t)=F(t)-E(F,t)$, אנו מקבלים ש-:

$$C(F,t)=F(t)N(-d_1)-De^{-(T-t)}DN(d_2) \tag{17}$$

[12] הסכם בין שני צדדים לפיו צד אחד תמורת תשלום, מקבל זכות שאינה חובה למכור נכס מסוים בכמות, זמן ומחיר קבועים וידועים מראש.

[13] מודל כלכלי להערכת שווי אופציה המניח התפלגות לוג-נורמלית של מחירי המניות. הנחות נוספות הן: שער ריבית קבוע וזהה ללווים ומלווים, אפשרות למכירה בחסר, המסחר בני"ע רציף והשינויים הצפויים במחירי הנכסים הינם קטנים מתקופהלתקופה. הנוסחה מחשבת את השווי התאורטי של כתב האופציה. הנוסחה משקללת את מחיר נכס הבסיס (S), מחיר המימוש של האופציה (E), ריבית נכס חסר סיכון (r), הזמן שנותר עד פקיעת האופציה (t) ואת סטיית התקן על התשואה של נכס הבסיס (σ) השטח מתחת לעקום = (N(d)).

ב. **מודל KMV-Merton**

מודל KMV-Merton מסתמך על מודל Merton המיושם על שווי נכסי הפירמה, ומסתכל על שווי ההון העצמי כאופציית רכש (call) על הנכסים במסגרת משוואת Black-Scholes-Merton[14] על מנת לייצר הסתברות לחדלות פירעון עבור כל אחת מהפירמות שבמדגם בכל נקודת זמן נתונה. במודל זה, אנחנו צריכים לאמוד את אומדני נכסי הפירמה – הלא הם השווי הנוכחי של נכסי הפירמה ותנודתיות נכסי הפירמה מתוך שווי השוק[15] של ההון העצמי של הפירמה והתנודתיות המיידית של ההון העצמי (the equity's instantaneous volatility), בהינתן הכמות ומשך חיי החוב. משך חיי החוב נבחר שרירותית ועלותו הפנקסנית של החוב בספרי הפירמה מונחת כמשקפת את ערכו הנקוב של החוב. הפירמה מגיע למצב של חדלות פירעון כאשר שווי נכסי הפירמה נופל מתחת לנקודת חדלות הפירעון (DP), המהווה את הערך הנקוב של החוב. כדי לחשב את ההסתברות לחדלות פירעון, נציג פרמטר חדש, הנקרא המרחק לחדלות פירעון, שהוא המרחק בין תוחלת התפלגות השוויים העתידיים של נכסי הפירמה לבין נקודת חדלות הפירעון. תחילה, נחלק את המרחק בין תוחלת התפלגות השוויים העתידיים של נכסי הפירמה לבין נקודת חדלות הפירעון במכפלת תנודתיות נכסי הפירמה בתוחלת התפלגות השוויים העתידיים של נכסי הפירמה. לאחר מכן, נציב את המרחק מחדלות הפירעון בפונקציית פונקציית הצפיפות המצטברת (קרי, פונקציית התפלגות) על מנת לחשב את ההסתברות ששווי הפירמה יהיה נמוך מהערך הנקוב של החוב במועד פדיון החוב.

1) **אמידת שווי נכסי הפירמה** V **והתנודתיות של תשואות הפירמה** σ_F

תחת ההנחות של Merton, ההון העצמי הוא אופציית רכש (call) על שווי נכסי הפירמה והזמן, והוא עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion) כדלקמן:

$$dE = \mu_E E dt - \sigma_E E dW \qquad (18)$$

μ_E ו- σ_E הם תוחלת התשואה על ההון העצמי והתנודתיות של ההון העצמי, בהתאמה.

[14] מודל כלכלי להערכת שווי אופציה המניח התפלגות לוג-נורמלית של מחירי המניות. הנחות נוספות הן: שער ריבית קבוע וזהה ללווים ומלווים, אפשרות למכירה בחסר, המסחר בני״ע רציף והשינויים הצפויים במחירי הנכסים הינם קטנים מתקופהלתקופה. הנוסחה מחשבת את השווי התאורטי של כתב האופציה. הנוסחה משקללת את מחיר נכס הבסיס (S), מחיר המימוש של האופציה (E), ריבית נכס חסר סיכון (r), תשואת הדיבידנד (q), הזמן שנותר עד פקיעת האופציה (t) ואת סטיית התקן על התשואה של נכס הבסיס (σ) השטח מתחת לעקום = (N(d)).

[15] הנתון המתקבל ממכפלה של ההון הרשום למסחר בשער המניה (או מניות אם יש מספר סוגים).

באמצעות הלמה של איטו (Ito's Lemma) ניתן לרשום את הדינמיקה של ההון העצמי כ-:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\partial E}{\partial F}dF + \frac{\partial E}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 E}{\partial F^2}(dF)^2 \ldots \\ &= \left(\frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 E}{\partial F^2} + \mu_F F \frac{\partial E}{\partial F} + \frac{\partial E}{\partial t}\right)dt + \sigma_F F \frac{\partial E}{\partial F} dW \end{aligned} \quad (19)$$

מהשוואת איברי הדיפוזיה במשוואות (18) ו- (19), נקבל את הקשר הבא:

$$E\sigma_E = F\sigma_F \frac{\partial E}{\partial F} \quad (20)$$

בנוסף, אנו יכולים לגזור את הדלתא[16] של ההון העצמי $Equity\ \ Delta\ \Delta^E = \frac{\partial E}{\partial F} = N(d_1) > 0$ מתוך משוואה (16).

לכן, הקשר החדש בין התנודתיות של הפירמה לבין התנודתיות של ההון העצמי הינו:

$$E\sigma_E = F\sigma_F N(d_1) \quad (21)$$

באופן דומה, מהשוואת איברי הסחיפה (drift) במשוואות (18) ו- (19), נקבל את הקשר הבא:

$$\mu_E E = \frac{1}{2}\sigma_F^2 F^2 \frac{\partial^2 E}{\partial F^2} + \mu_F F \frac{\partial E}{\partial F} + \frac{\partial E}{\partial t} \quad (22)$$

בנוסף, אנו יכולים לגזור את הגמא[17] של ההון העצמי $Equity\ \ Gamma\ \Gamma^E = \frac{\partial^2 E}{\partial F^2} = \frac{n(d_1)}{F\sigma_F\sqrt{T-t}} > 0$ והתטא[18] של ההון העצמי $Equity\ Theta\ \theta^E = \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{Fn(d_1)\sigma_F}{2\sqrt{T-t}} - rDe^{-r(T-t)}N(d_2) > 0$ מתוך משוואה (16), כאשר $n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(d_1)^2/2}$.

---

[16] השינוי במחיר האופציה כתוצאה משינוי של יחידה אחת בשער נכס הבסיס.

[17] השינוי בדלתא כתוצאה משינוי של יחידה אחת במחיר נכס הבסיס.

[18] השינוי במחיר האופציה, כתוצאה מהתקצרות הזמן שנותר עד למועד פקיעת האופציה ביום אחד.

לפיכך, נקבל ש- :

$$\mu_F = \frac{\mu_E E - \theta^E - \frac{1}{2}\left(\sigma_F^2 F^2\right)\Gamma^E}{F\Delta^E} \qquad (23)$$

בפועל, שווי ההון העצמי עבור פירמות ציבוריות נצפה באופן ישיר מתוך נתוני הבורסה. מכאן משתמע כי שווייה של אופציית הרכש (call) שנכתבה על שווי נכסי הפירמה נצפית אף היא. בנוסף, ניתן לקבל את התנודתיות של ההון העצמי באמצעות אמידת התנודתיות המשתמעת הגלומה (Implied Volatility) במחירי האופציות הנצפים או על ידי שימוש בנתונים היסטוריים אודות תשואות המניה[19]. ברגע שיש לנו את שיעור הריבית חסרת הסיכון ואת אופק הזמן של החוב, האומדנים היחידים שאינם ידועים הם שווי נכסי הפירמה $F(t)$ והתנודתיות של הפירמה σ_F. לפיכך, אנו יכולים לפתור את שתי המשוואות הא-לינאריות (16) ו- (20) בו-זמנית על מנת לקבוע את $F(t)$ ו- σ_F באמצעות שווי ההון העצמי, התנודתיות של ההון העצמי ומבנה ההון.

2) <u>**חישוב המרחק לחדלות פירעון (DD)**</u>

ההנחה של Merton בקשר להיותם של נכסי הפירמה סחירים מופרת למעשה על ידי חברת KMV. חברת KMV ערה לנקודה זו, ובמקום זה משתמשת בהגדרות של Black-Scholes ו- Merton רק כמוטיבציה לחישוב שלב הביניים הנקרא "המרחק לחדלות פירעון" (DD) בטרם חישוב ההסתברות לחדלות פירעון.

על מנת לגזור את ההסתברות לחדלות פירעון של פירמה ספציפית, פרט לתוצאות של שווי נכסי הפירמה ואומדן התנודתיות של הפירמה, עלינו לחשב את המרחק לחדלות פירעון. אירוע חדלות הפירעון מתרחש כאמור כאשר שווי נכסי הפירמה הינו מתחת לנקודת חדלות הפירעון. במודל Merton הערך הנקוב של החוב מונח כנקודת חדלות הפירעון. על ידי שימוש בתנודתיות של נכסי הפירמה, אנחנו יכולים לחשב את המרחק לחדלות פירעון. ככל שהמספר שמייצג המרחק לחדלות פירעון גדול יותר, כך הסיכוי שהחברה תגיע לחדלות פירעון נמוך יותר. לפיכך, אנו יכולים לבטא את ה- DD באמצעות ההסתברות הניטרלית לסיכון (risk-neutral) לחדלות פירעון כדלקמן :

$$Distance-to-Default \ (DD) = \frac{\ln\left(F(t)/D\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_F\right)(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}} \qquad (24)$$

[19] תעודת השתתפות כספית בהונה של החברה המקנה בעלות חלקית בזכויות והשליטה בחברה ובכלל זה זכות הצבעה, זכות לקבלת דיבידנד וזכויות בפירוק. לבעלי המניות אין אחריות פיננסית לפעילות החברה מעבר להשקעתם בה.

כאשר r הוא שיעור התשואה חסרת הסיכון של נכסי הפירמה. $F(t)$ הוא השווי הנוכחי של נכסי הפירמה ו- D היא הערך הנקוב של החוב.

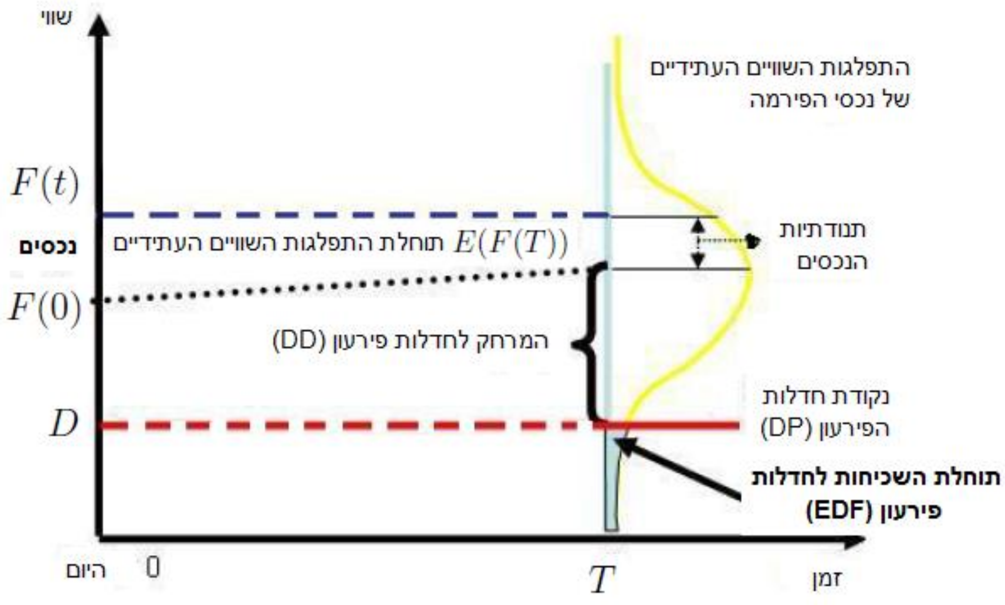
3) <u>גזירת ההסתברויות לחדלות פירעון (DD)</u>

לאחר שקיבלנו את ה- $F(t)$ וה- σ_F, אנו יכולים לגזור מיידית את ההסתברויות לחדלות פירעון. בהתאם להגדרה של חדלות פירעון לפיה שווי נכסי הפירמה הינו מתחת לשווי החוב, אנו יכולים לבטא את ההסתברויות לחדלות פירעון באמצעות הסתברות ניטרלית לסיכון בזמן T כ-:

$$
\begin{aligned}
P_t &= \Pr\left[F(T) < D\right] \\
&= \Pr\left[F(t)\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_F W_{T-t}\right\} < D\right] \\
&= \Pr\left[W_{T-t} < \frac{\ln\left(F(t)/D\right) - \left(r - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_F}\right] \\
&= \Pr\left[Z < \frac{\ln\left(F(t)/D\right) - \left(r - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}\right] \\
&= \Pr\left[Z < -DD\right] \\
&= N(-DD)
\end{aligned} \tag{25}
$$

כאשר $Z \sim N(0,1)$ ו- $DD = \dfrac{\ln\left(F(t)/D\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_F\right)(T-t)}{\sigma_F\sqrt{T-t}}$.

השטח הירוק בתרשים 2 מתחת לנקודת חדלות הפירעון שווה ל- $N(-DD)$.



תרשים 2: התפלגות שווי נכסי הפירמה במועד פדיון החוב

ההסתברות לחדלות פירעון המתוארת לעיל איננה מייצגת את ההסתברות בפועל/האובייקטיבית לחדלות הפירעון של הפירמה, אלא את הסתברות הנייטרלית לסיכון/הסובייקטיבית לחדלות פירעון של הפירמה. מאחר ונכס הבסיס הינו מסוכן, הרי ששווי הפירמה אינו "נסחף" (צומח) בשיעור הריבית חסרת הסיכון r. על מנת לקבל הסתברות האובייקיבית לחדלות פירעון של הפירמה, עלינו להחליף את שיעור הריבית חסרת הסיכון r בתוחלת התשואה על נכסי הפירמה μ_F, ואז נקבל ש-:

$$N(-DD^*) = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{F(t)}{D}\right) + \left(\mu_F - \frac{\sigma_F^2}{2}\right)T}{\sigma_F\sqrt{T}}\right) \qquad (26)$$

כדי להעריך את תוחלת התשואה על נכסי הפירמה μ_F, אנחנו יכולים להשתמש במשוואה (20). במציאות, ה"סחיפה" (Drift) גבוהה יותר משיעור התשואה חסרת הסיכון של נכסי הפירמה, למרות אותם איברי הדיפוזיה של ההתפלגות האובייקטיבית של נכסי הפירמה ושל ההתפלגות חסרת הסיכון של נכסי הפירמה.

ג. __מודל VK (מודל Moody's-KMV)__

עד כה עסקנו באופן שבו מודל KMV-Merton עובד במסגרת ההנחות של Merton. עם זאת, הנחות אלו עשויות שלא להיות זהות לאופן שבו פועל מודל Moody's-KMV. מודל Moody's-KMV שבמקור נקרא מודל VK (ראה [2]), הינו הכללה של מודל Merton.

למעשה, מודל Moody's-KMV מציג קונספט חדש למדידת ההסתברות לחדלות הפירעון של הפירמה, הנקראת תוחלת השכיחות לחדלות פירעון (EDF) (ראה [7]). ה- EDF מתקנן כמה מההנחות של מודל Merton, ומשתמש במסד הנתונים הסטטיסטיים הגדול של חברת Moody's המבוסס על תצפיות עבר בנוגע לשיעורי Default, על מנת לאמוד את ההתפלגות האמפירית של המרחקים לחדלות פירעון. בהתבסס על ההתפלגות שהונחה, מודל Moody's-KMV מחשב את תוחלת השכיחות לחדלות פירעון. ה- EDF הינו ההסתברות הפיזית/האובייקטיבית לחדלות פירעון עבור פירמה נתונה. ניתן לאמוד את ה- EDF באמצעות תוכנה בשם Credit Monitor המבצעת מיפוי אמפירי בהתבסס על שיעור Default בפועל כדי לקבל את ההסתברויות לחדלות פירעון משנה 1 ועד 5. הגרסה החדשה ביותר נקראת EDF 8.0 (ראה [7]), המעדנת את מיפוי ה-DD ל- EDF על ידי מסד גדול יותר של תצפיות עבר בנוגע לשיעורי Default ומעדכנת את שיעור הריבית חסרת הסיכון בכל חודש.

מאחר ושיטות המידול של Moody's הן מידע קנייני ולא מידע ציבורי הפתוח לציבור, אנו מסתמכים רק על כמה תכונות בסיסיות מתוך כמה מאמרים מחקריים המצויים באתר של Moody's KMV.

במודל Merton מבנה ההון של הפירמה מורכב משני סוגי תביעות על תזרימי המזומנים של הפירמה: סוג אחד של חוב (לא המיר וללא תשלומי קופון) וסוג אחד של מניות רגילות (ללא תשלומי דיבידנד). לעומת זאת במודל Moody's-KMV מבנה ההון של הפירמה מורכב מחמישה סוגי תביעות על תזרימי המזומנים של הפירמה: (1) התחייבויות לזמן קצר, (2) התחייבויות לזמן ארוך, (3) מניות רגילות, (4) מניות מועדפות (preferred stocks, מניות בכורה) ו- (5) כתבי אופציה מסוג Warrants[20] ו- ESOPs. בנוסף, במודל Moody's-KMV הקופונים והדיבידנדים משולמים באופן רציף והפירמה יכולה להנפיק תביעות חדשות (זוטרות יותר, באותה רמת בכירות או בכירות יותר) או לבצע רכישה עצמית (repurchase) של מניות הפירמה. מקור הדאגה הבא מתמקד בשווי השוק של נכסי הפירמה ובשווי השוק של ההתחייבויות. שני האומדנים הללו אינם יכולים להיות שווים לערכם הנקוב, מאחר ושווי השוק של הנכסים אינו נסחר ועל כן אינו נצפה באופן ישיר, והיות ושווי השוק של ההתחייבויות איננו אומדן קבוע, היות והוא משתנה בהתאם לאיכות האשראי של הפירמה. למעשה, במודל Moody's-KMV מתבצעות התאמות קנייניות למידע החשבונאי שבו הוא משתמש על מנת לחשב את הערך הנקוב של חוב.

[20] אופציית רכש המונפקת ע"י חברה, המתחייבת להנפיק מניותיה במועד מימוש האופציה תמורת תשלום מחיר המימוש ע"י מחזיקי כתב האופציה.

מאפיין האופציה של ההון העצמי הוא הבסיס של מודל Merton. במודל KMV-Merton, לאופציה יש מאפיין של "אופציית רכש (call) ונילה (Plain Vanilla) אירופאית[21] במועד המימוש T[22], אך במודל Moody's-KMV לאופציה יש מאפיין של אופציית רכש (call) חסם (Barrier) אמריקאית[23] מסוג Knock out (Down and Out) קונסול (Perpetual, לנצח) אשר איננה פוקעת לעולם אך ניתנת למימוש בכל עת.

חברת Moody's מצאה, על בסיס נתונים סטטיסטיים המבוססים על תצפיות עבר בנוגע לעשרות פירמות, שכאשר חדלות הפירעון של הפירמה מתרחשת, שווי השוק של נכסי הפירמה[24] נמצא איפה שהוא בין סך ההתחייבויות לזמן ארוך לבין סך ההתחייבויות לזמן קצר. לפיכך, ההגדרה של חדלות הפירעון של הפירמה ששווי הפירמה נמוך משווי החוב איננה מדויקת דיו לצורך אמידת ההסתברויות בפועל לחדלות פירעון (ראה [3]).

בהתבסס על המחקר האמפירי של Moody's, נקודת חדלות הפירעון (DP) שווה לסך הצברם של ההתחייבויות לטווח קצר ומחצית ההתחייבויות לטווח ארוך. לפיכך, אנו יכולים לייצג את המרחק לחדלות פירעון כמספר סטיות התקן שבו רחוק שווי הנכס מחדלות הפירעון.

$$DD = \frac{E(F(t)) - DP}{E(F(t))\sigma_F} \tag{27}$$

כאשר $E(F(t))$ הינו תוחלת התפלגות השוויים העתידיים של נכסי הפירמה ושווה ל- $\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)t\right\}$ $E(F(t)) = F(0)\exp$, D_S הינו החוב לטווח קצר, D_L הינו החוב לטווח ארוך, DP הינו נקודת חדלות הפירעון והוא שווה ל- $DP = D_S + \frac{1}{2}D_L$ ו- DD הינו המרחק מחדלות פירעון, המייצג את המרחק בין שווי השוק של נכסי הפירמה ונקודת חדלות הפירעון.

ולבסוף, מודל Moody's-KMV מתנתק מרעיון ההתפלגות הנורמלית לצורך קביעת ההסתברות לחדלות פירעון, במסד הנתונים הנתונים הסטטיסטיים הגדול של חברת Moody's המבוסס על תצפיות עבר בנוגע לשיעורי Default, על מנת לאמוד תוחלת השכיחות לחדלות פירעון. לפיכך, ניתן להשתמש במסד הנתונים על מנת לקבוע קשר חד-חד ערכי (one-to-one relationship) בין DD ל-

---

[21] אופציה הניתנת למימוש בתאריך הפקיעה בלבד. עם זאת האופציה נסחרת בבורסה בכל יום מסחר. אופציות אירופאית הן הנסחרות בבורסה בת"א.

[22] המועד האחרון בו זכאי מחזיק האופציה לממש את הזכות הנתונה באופציה לאחר מועד זה האופציה פוקעת.

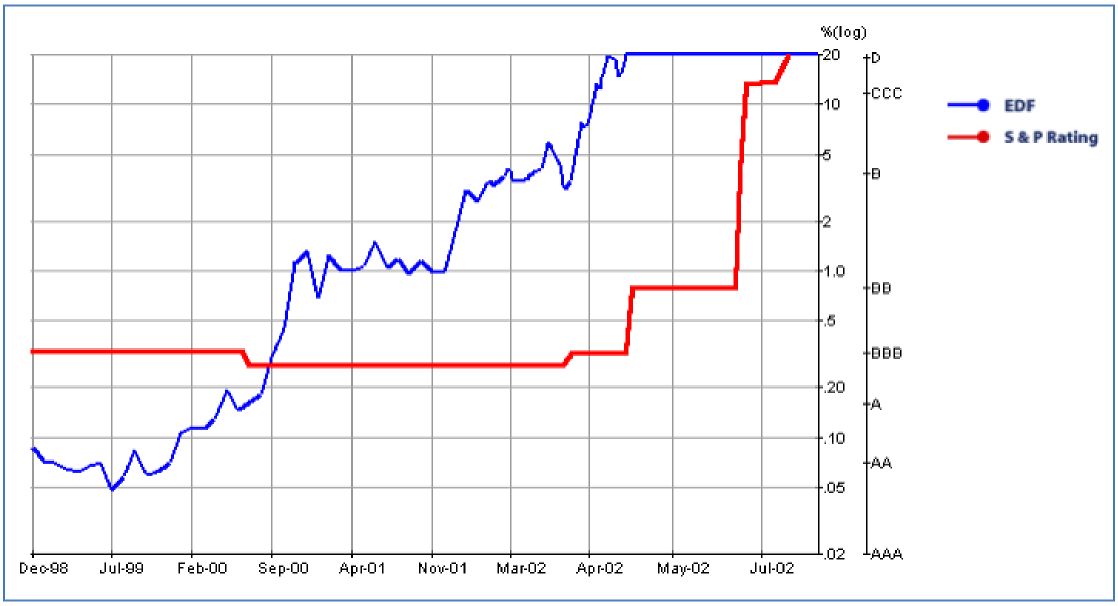
[23] אופציה הניתנת למימוש בכל עת עד תאריך הפקיעה.

[24] שווי השוק של נכסי הפירמה הוא הערך הנוכחי הנקי של תזרים המזומנים החופשיים העתידיים של הפירמה.

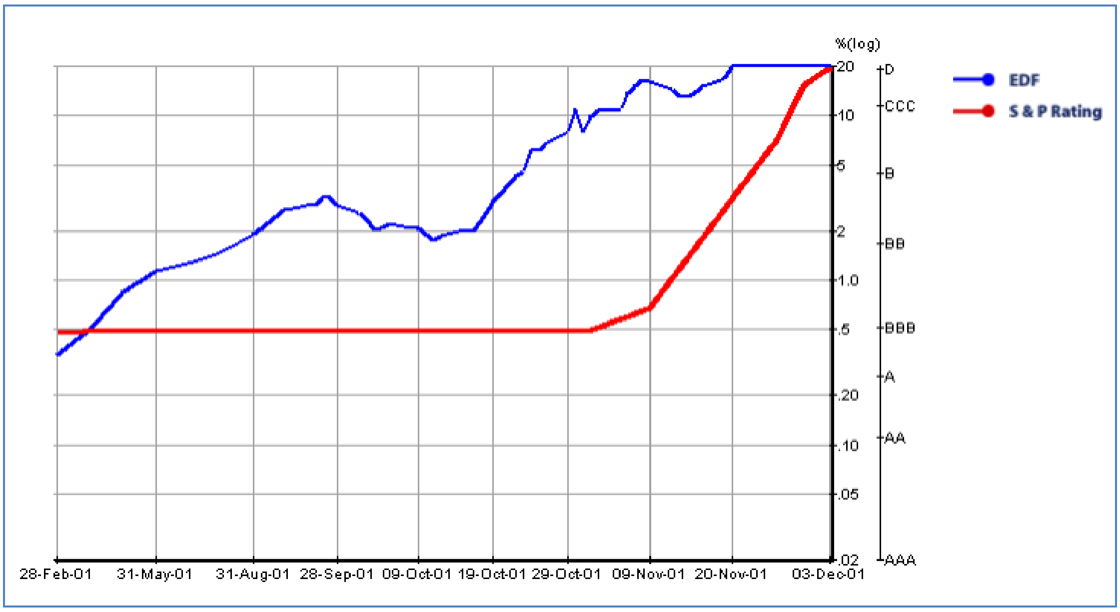
EDF. בשל הקשר החד-חד ערכי, נוצר מצב בו לשתי פירמות משני ענפים שונים, בעלות גודל שונה ומיקום גיאוגרפי שונה אך עם אותו DD יהיה בהכרח את אותו EDF.

ההשלכה החשובה ביותר של מודל Merton היא שמודל KMV-Merton משתמש בהתפלגות הנורמלית על מנת להגדיר את ההסתברות לחדלות פירעון. למעשה, שימוש בהתפלגות נורמלית הוא בחירה גרועה למדי על מנת להגדיר את ההסתברות לחדלות פירעון (ראה [3]). ראשית, נחזור לנקודת חדלות הפירעון (DP). במודל Merton, נקודת חדלות הפירעון היא קבועה ושווה לערך הנקוב של החוב. עם זאת, במודל Moody's-KMV, נקודת חדלות הפירעון היא משתנה; זה איכשהו מתקשר לרכישה עצמית של חובות, היות ופירמות לעתים קרובות מתאימות את התחייבויותיהם כאשר הן מתקרבות לחדלות פירעון. שנית, זמן חדלות הפירעון אינו בהכרח שווה לטווח לפדיון של החוב; זה יכול להיות בכל עת בתום אופק הזמן או לפני כן. ואכן, ניתן לעדכן את נתוני השוק על בסיס יומי בגלל שינויים בנקודת חדלות הפירעון. לבסוף, להתפלגות תשואות נכסי הפירמה יש זנבות דקים יותר מאלו של ההתפלגות הנורמלית.

מקרי המבחן (case studies) של Moody's, WorldCom (ראה [10]) ו- Enron (ראה [11]) מהווים דוגמאות ליתרונה של Moody's, באמצעות השימוש שלה במודל Moody's KMV, על מתחרותיה, כמו למשל Standard & Poor's. בשני המקרים האמורים, כאשר מחיר המניה של שתי החברות צנח, המרחק לחדלות הפירעון מייד נפל, והקפיץ את ה- EDF. לסוכנויות הדירוג האחרות המשתמשות בשיטות דירוג האשראי המסורתיות לקח כמה ימים להפנים את השינוי הזה. ברור לחלוטין שה- EDF מהווה נורת אזהרה מוקדמת טובה יותר מהשיטות המסורתיות. מתרשימים 3 ו- 4, ניתן לראות כי מדד ה- EDF מוביל את הדירוגים המסורתיים במובן מסוים. בעוד שהדירוגים המסורתיים מותאמים מעת לעת באופן בדיד, הרי שה- EDF מגיב לכל שינוי בסיכון חדלות הפירעון באופן דינמי ורציף. תוצאות אלו מראות כי שימוש בשוויי ההון העצמי לצורך הסקה על ההסתברויות לחדלות פירעון, משקף את המידע באופן מהיר יותר ומקיף יותר בהשוואה לשיטות המסורתיות.



תרשים 3: WorldCom, EDF ודירוג S&P



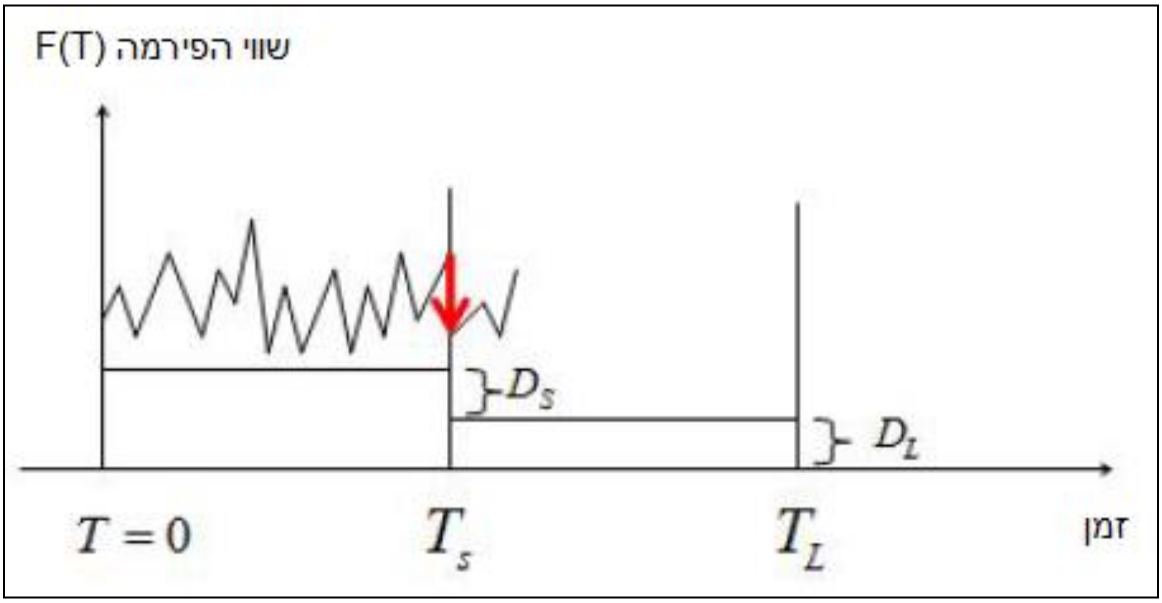
תרשים 4: Enron, EDF ודירוג S&P

3. <u>הרחבה לשני סוגים של חוב</u>

על פי ההנחות של מודל Merton, מבנה ההון של הפירמה מורכב מסוג אחד של חוב ומסוג אחד של מניות. כעת אנו מרחיבים את ההנחה הזאת להנחה חדשה לפיה, מבנה הון מורכב משני סוגים של חוב ומסוג אחד של מניות. תביעות החוב על הפירמה נבדלות אחת מהשנייה בטווחי הפדיון שלהן, כלומר, חוב לטווח קצר וחוב לטווח ארוך. החוב לטווח קצר הינו בעל טווח לפדיון של T_S וערך נקוב של D_S והחוב לטווח ארוך הינו בעל טווח לפדיון של T_L וערך נקוב של D_L. כל החובות משולמים ללא סבבי

גיוס הון או חוב חדשים. עכשיו נדבר על שווי ההון העצמי וההסתברות לחדלות פירעון תחת ההנחה החדשה לגבי מבנה ההון של הפירמה.

נניח שהזמן הנוכחי הוא $t = 0$ והפירמה צריכה לשלם את החוב לטווח קצר שלה בזמן $t = T_S$. אם הפירמה אינה יכולה לעמוד בהתחייבותה לתשלום החוב לטווח קצר שלה D_S, כפי שהוגדר מוקדם יותר באירוע של חדלות פירעון, הרי שהיא מגיעה מייד לחדלות פירעון. אחרת, הפירמה שורדת, אך שווי הפירמה בזמן T_S קטן בגובה תשלום החוב לטווח קצר שלה D_S, כמוצג בתרשים 5. כאשר הפירמה מגיעה לזמן T_L, היא שוב פעם צריכה לשלם, אך הפעם את החוב לטווח ארוך שלה D_L. פעם נוספת, אם הפירמה אינה יכולה לעמוד בהתחייבותה לתשלום החוב לטווח ארוך שלה D_L היא מגיעה מייד לחדלות פירעון. על מנת לדון בשווי ההון העצמי ובהסתברות לחדלות פירעון בין זמן $t = 0$ וזמן $t = T_S$, אנחנו צריכים לפצל את תקופת הזמן לשני חלקים בלתי תלויים. החלק הראשון הוא תקופת הזמן $0 \rightarrow T_S$, והחלק השני הוא $T_S \rightarrow T_L$.



תרשים 5: שני סוגים של חוב

א. <u>שווי ההון העצמי</u>

כדי לחשב את שווי ההון העצמי, עלינו לעבוד באופן רקורסיבי ממועד הפדיון של החוב לטווח ארוך T_L ועד לזמן הנוכחי $t = 0$. ראשית, עלינו לקחת את שווי ההון העצמי בתקופה שבין T_S ו- T_L. במועד הפדיון של החוב לטווח ארוך T_L, שווי החוב הוא $Min(F(T_L), D_L)$ ושווי ההון העצמי הוא $Max(F(T_L) - D_L, 0)$. מחזיק איגרת החוב מקבל את הערך הנקוב של החוב, D_L, ומחזיק המניה מקבל את ההפרש שבין שווי הפירמה לבין הערך הנקוב של החוב, $F(T_L) - D_L$, כל זמן ששווי הפירמה בזמן T_L גדול יותר משווי החוב D_L.

ממשוואת Black-Scholes-Merton (13) וממשוואה (16), ניתן לתאר את שווי ההון העצמי במהלך התקופה שבין T_S ו- T_L כפונקציה של:

$$E\left(F\left(T_S\right),T_S\right)=F\left(T_S\right)N\left(d_1^{T_S}\right)-e^{-\left(T_L-T_S\right)}D_L N\left(d_2^{T_S}\right)$$

$$d_{1,2}^{T_S}=\frac{\ln\left(F\left(T_S\right)/D_L\right)\pm\left(r-\frac{1}{2}\sigma_F^2\right)\left(T_L-T_S\right)}{\sigma_F\sqrt{T_L-T_S}} \qquad (28)$$

כאשר $N(\cdot)$ היא ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית.

היות והפירמה איננה יכולה לבצע סבבי גיוס הון או חוב חדשים על מנת לכסות את תשלום החוב המקורי שלה, הרי ששווי הפירמה עוקב קפיצה בדידה בזמן T_S. אבל, שווי ההון העצמי יהיה רציף אם הפירמה לא תגיע לחדלות פירעון בנקודה זו, אחרת ישנה כאן הזדמנות לארביטראז'. עלינו לדון בשווי הפירמה לפני ואחרי הקפיצה הבדידה, כאשר הזמן לפני ואחרי הקפיצה הוא T_S^- ו- T_S^+, בהתאמה. על כן אנו מקבלים את הקשר הבא בזמן T_S.

$$\begin{cases} F\left(T_S^-\right) & = F\left(T_S^+\right)+D_S \\ E\left(F\left(T_S^-\right),T_S^-\right) & = E\left(F\left(T_S^+\right),T_S^+\right) \end{cases} \qquad (29)$$

בזמן T_S^-, שווי החוב הוא $Min\left(F\left(T_S^-\right),D_S\right)$ ושווי ההון העצמי הוא $Max\left(E\left(T_S^-,F\left(T_S^-\right)\right),0\right)$. מאחר וניתן להסתכל על ההון העצמי כאפוציה על שווי הפירמה, הרי שלמעשה יש לנו כאן אופציה על אופציה או אופציה מורכבת (compound option). על כן ניתן לרשום את שווי ההון העצמי, יחד עם משוואות (28) ו- (29), כדלקלן:

$$E\left(F(t),t\right)=\begin{cases} 0 & 0<F(t)<D_S \\ C_{BS}\left(F(t)-D_S;t,D_L,T_L\right) & F(t)>D_S \end{cases} \qquad (30)$$

ניתן לרשום את משוואה (30) כ-:

$$
\begin{aligned}
E\big(F(t),t\big) &= e^{-r(T_S-t)} E\Big(C_{BS}\big(F(t)-D_S, t; D_L, T_L\big)\Big|_{F(t)\geq D_S}\Big) \\
&= e^{-r(T_S-t)} \int_{D_S}^{\infty} C_{BS}\big(F(t)'-D_S, t; D_L, T_L\big) p\big(F(t), t; F(t)', T_S\big) dF' \\
&= e^{-r(T_S-t)} \int_{0}^{\infty} C_{BS}\big(F(t)'', t; D_L, T_L\big) p\big(F(t), t; F(t)''+D_S, T_S\big) dF'' \qquad (31) \\
&= e^{-r(T_S-t)} \int_{0}^{\infty} C_{BS}\big(F(t)''\big) dF''
\end{aligned}
$$

כאשר p היא פונקצית צפיפות ההסתברות ו-

$$
f\big(F(t)''\big) = C_{BS}\big(F(t)'', t; D_L, T_L\big) p\big(F(t), t; F(t)''+D_S, T_S\big)
$$

מאחר ואין פתרון אנליטי למשוואה (31) יש לבחור בשיטת הטרפז המורכבת (composite trapezoid rule) לצורך קבלת פתרון נומרי. הרעיון הבסיסי הוא להחליף את האינסוף שבאינטגרל בערך כלשהו שיהפוך את $f\big(F(t)''\big)$ לקטן מספיק, ולהשתמש במשוואת שיטת הטרפז המורכבת על מנת לרשום את הפתרון המקורב.

ב. <u>ההסתברות לחדלות פירעון</u>

כדי לחשב את ההסתברות לחדלות פירעון (default probability) של הפירמה תחת ההנחה של שני סוגים של חוב, עלינו לחשב את ההסתברויות לשרידות (survival probabilities) של שני החלקים. על ידי הכפלתם של שתי ההסתברויות להישרדות, נקבל את ההסתברות לחדלות פירעון בתקופה זו.

אנחנו מתחילים עם התקופה שבין $t = 0$ ו- T_S. כדי לחשב את ההסתברות לשרידות בזמן T_S, עלינו פשוט להתאים את ההסתברות לחדלות פירעון עבור סוג אחד של חוב D_S כך ש-

$$
\begin{aligned}
S_{T_S} &= 1 - \Pr\big[F(T_S) < D_S\big] \\
&= 1 - N\big(-DD_S\big) \qquad (32) \\
&= N\big(DD_S\big)
\end{aligned}
$$

כאשר $$DD_S = \frac{\ln\left(\frac{F(0)}{D_S}\right) + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)T_S}{\sigma_F\sqrt{T_S}}$$

באופן דומה, ההסתברות לשרידות בתקופה שבין T_S ו- T_L הינה

$$\begin{aligned} S_{T_L} &= 1 - \Pr\left[F(T_S) - D_S < D_L\right] \\ &= 1 - N(-DD_L) \\ &= N(DD_L) \end{aligned} \tag{33}$$

כאשר $$DD_L = \frac{\ln\left(\frac{F(T_S) - D_S}{D_L}\right) + \left(\mu_F - \frac{1}{2}\sigma_F^2\right)(T_S - T_L)}{\sigma_F\sqrt{T_S - T_L}}$$

מהתוצאות לעיל נקבל את ההסתברות לחדלות פירעון של הפירמה במהלך התקופה שבין $t=0$ ו- T_S כדלקמן:

$$\begin{aligned} Default \ \ \Pr obability &= 1 - S_{T_L} \times S_{T_S} \\ &= 1 - N(DD_S) \times N(DD_L) \end{aligned} \tag{34}$$

פעם נוספת, אנו לא יכולים פשוט לעבוד עם ההסתברות לחדלות פירעון מאחר והאומדנים עבור $F(t)$ ו- σ_F אינם ידועים. עם זאת, אנו יכולים לפתור את שתי המשוואות הא-לינאריות (20) ו-(31) בו זמנית על מנת לקבוע את שני האומדנים הלא ידועים הללו. לסיכום, בהינתן יתר האומדנים הנצפים, נוכל לחשב בקלות את ההסתברות לחדלות פירעון עבור מקרה של שני סוגים של חוב.

4. בחינת המודל

א. בחירת הנתונים

על מנת להשתמש במשוואות שגזרנו בחלק 3, בחרנו בשמונה עשר פירמות וגזרנו את ההסתברויות לחדלות פירעון שלהן בין השנים 2011-2013. כל שש פירמות הן מאותו ענף בבורסה לניירות ערך בתל אביב, כאשר הענפים הם: תקשורת ומדיה, השקעה ואחזקות ונדל"ן ובינוי. בכל ענף, סיווגנו את הפירמות לגדולות, בינוניות וקטנות, בהתאם לגודלן בלבד. על פי גודלן, קראנו לגדולות, לבינוניות ולקטנות, בשם מדגם אחד, מדגם שתיים ומדגם שלוש, בהתאמה.

ב. אמידת הפרמטרים

כאשר אנו מחשבים את הפרמטרים במודל KMV, אנו משתמשים בתוכנת Excel פעם אחת על מנת ליישם את הנתונים המתאימים ופעם שנייה על ממנת לפתור את שתי המשוואות הא-לינאריות (16) ו- (21) בו זמנית על מנת לחלץ הן את שווי נכסי הפירמה והן את תנודתיות נכסי הפירמה. לאחר שאמדנו את כל הפרמטרים, אנו מתחילים לפתור את המרחק לחדלות פירעון (DD) באמצעות משוואה (24). בהסתמך על ההנחה כי שווי נכסי הפירמה עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion), נחלץ את ההסתברות המשתמעת לחדלות פירעון (IDP) באמצעות משוואה (25) או את ההסתברות בפועל לחדלות פירעון באמצעות משוואה (26) וחישוב הדלתא של ההון העצמי, הגמא של ההון העצמי והתטא של ההון העצמי. להלן שלבי החישוב שלנו:

1) תנודתיות ההון העצמי

תנודתיות ההון העצמי מחושבת על ידי שימוש בנתונים היסטוריים שנמדדו מסדרת נתונים עתית של תשואות כל מניה. בהסתמך על ההנחה כי שווי ההון העצמי עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion), אנו מניחים ש- μ_i הוא הלוגריתם הטבעי של התשואה ביום ה- i, כאשר S_i ו- S_{i-1} הם שערי הנעילה המתואמים באגורות ביום i ו- $i-1$, בהתאמה. ואז נקבל ש-:

$$\mu_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \tag{35}$$

על ידי שימוש בנתונים ההיסטוריים ניתן לחזות את התנודתיות שהוצגה על ידי Hull (ראה [12]), אנחנו יכולים לחשב את התנודתיות של ההון העצמי בשנה הבאה.

$$\sigma_E = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 - \frac{1}{(n-1)n}\left(\sum_{i=1}^{2}\mu_i\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \tag{36}$$

כאשר n הוא מספר ימי המסחר, שהינו בקירוב שווה ל- 253.

2) שווי השוק של ההון העצמי

שווי השוק של ההון העצמי נלקח ישירות מאתר הבורסה (ראה [13]) ל- 31 בדצמבר של כל אחת מהשנים 2011, 2012 ו- 2013.

3) שיעור הריבית חסרת הסיכון

במאמר זה, אנחנו משתמשים בשיעור התשואה האפקטיבית על מק״מ[25] ל- 365 ימים כשיעור הריבית חסרת הסיכון. הנתונים מתוך בנק ישראל (ראה [14]). מאחר ושיעור התשואה האמור משתנה מחודש לחודש בשנים האחרונות, לקחנו את ממוצע שיעורי התשואה ב- 12 החודשים של כל אחת מהשנים 2011, 2012 ו- 2013 על מנת לייצר אומדנים אמפיריים מדויקים יותר. אומדני שיעור הריבית חסרת הסיכון לשנת 2011, 2012 ו- 2013 הם 1.31%, 2.23%, ו- 3.05%.

4) הטווח לפדיון[26]

באופן כללי, לכל אחת מהפירמות יש מבנה התחייבויות אחר, ומאחר ורצינו לפשט את הדיון, הנחנו שמשך החיים של התחייבויות הפירמה הוא שנה, כך ש- $T=1$.

5) התחייבויות הפירמה

על פי חברת Moody's שווי התחייבויות הפירמה הינו פחות או יותר ההתחייבויות השוטפות בתוספת מחצית ההתחייבויות שאינן שוטפות. הנתונים אודות ההתחייבויות נלקחו מתוך הדוחות הכספיים המבוקרים של כל אחת מהפירמות לשנים 2011-2012, ומהדוחות הכספיים הביניים הסקורים ליום 30 בספטמבר 2013 מאתר מאי״ה (ראה [15]).

6) שווי נכסי הפירמה ותנודתיות נכסי הפירמה

ברגע שקיבלנו את חמשת הפרמטרים לעיל, אפשר לחלץ את שווי נכסי הפירמה ותנודתיות נכסי הפירמה. אנו משתמשים בתוכנת Excel על מנת לפתור את שתי המשוואות האא-לינאריות (16) ו- (20) בו זמנית. כדי שיהיה ניתן להכניס אותם ל- תוכנת ה- Excel נסדר מחדש את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} f(F)=FN(d_1)-e^{-rT}DN(d_2)-E \\ f(\sigma_E)=\dfrac{F\sigma_F N(d_1)}{E}-\sigma_E \end{cases} \tag{37}$$

להלן הרעיונות הבסיסיים של החישוב שלב אחר שלב:

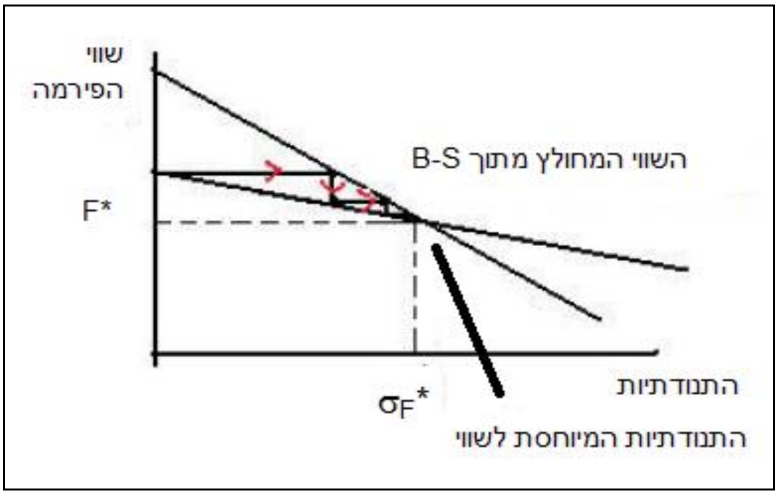
(I) התנודתיות הא-פריורית של נכסי הפירמה מוחלפת בתנודתיות ההון העצמי. מהצבת האומדן לתנודתיות נכסי הפירמה (קרי, האומדן לתנודתיות ההון העצמי) בפונקציה הראשונה במשוואה (37), נקבל אומדן לשווי נכסי הפירמה.

(II) מהצבת האומדן לשווי נכסי הפירמה שקיבלנו בשלב 1 בפונקציה השנייה במשוואה (37), נקבל אומדן חדש לתנודתיות ההון העצמי (הרי, את האומדן לתנודתיות נכסי הפירמה ואת האומדן לשווי נכסי הפירמה קיבלנו כבר בשלב 1).

[25] מלווה קצר מועד, מלווה של בנק ישראל אשר מונפק לתקופה של עד שנה. המונפק בניכיון ואינו נושא ריבית והצמדה. בסוף התקופה מגיע ערכו ל 100.

[26] התקופה שנותרה עד לפדיון הסופי של קרן החוב.

(III) אם האומדן החדש לתנודתיות ההון העצמי שקיבלנו בשלב 2 שווה לאומדן האמיתי[27] לתנודתיות ההון העצמי, התוכנה עוצרת, ראה תרשים 6. אחרת, עלינו לחזור על שלב 1 ושלב 2 עד אשר האומדן לתנודתיות ההון העצמי שיתקבל בשלב 2 יהיה שווה לאומדן האמיתי לתנודתיות ההון העצמי.



תרשים 6: איטרציה בין השווי לבין התנודתיות של נכסי הפירמה

עבור משוואה (37), לאחר שמצאנו את הפיתרון לשווי נכסי הפירמה ולתנודתיות נכסי הפירמה, עלינו להבטיח שהפתרון שקיבלנו הוא ייחודי (קרי, שלמערכת הפונקציות במשוואה (37) יש רק פתרון אחד בלבד). התשובה היא כן. אנחנו יכולים פשוט לגזור את הפונקציה הראשונה במשוואה (37) ביחס לשווי נכסי הפירמה F על מנת לקבל ש-:

$\frac{\partial f(F)}{\partial F} = N(d_1) + \frac{FN'(d_1) - De^{-rT}N'(d_2)}{F\sigma_F\sqrt{\tau}}$, $N'(\cdot)$ הוא פונקציית צפיפות ההסתברות הנורמלית. נסדר מחדש את המשוואה לעיל ונקבל ש-: $\frac{\partial f(F)}{\partial F} = N(d_1)$. מאחר ו- $N(d_1)$ גדול מאפס, הרי שגם $\frac{\partial f(F)}{\partial F}$ גדול מאפס. $f(F)$ הוא פונקציה עולה של F דבר המבטיח כי לפונקציה שורש אחד בלבד. אותו כנ״ל לגבי $f(\sigma_E)$.

7) <u>המרחק לחדלות פירעון (DD) וההסתברות המשתמעת לחדלות פירעון (IDP)</u>

ברגע שקיבלנו את כל הפרמטרים, אנחנו יכולים להתחיל לחשב את המרחק לחדלות פירעון, ולאחר מכן את הסתברות לחדלות פירעון על ידי מיפוי באמצעות ההתפלגות הנורמלית, בהתבסס על ההנחה ששווי נכסי הפירמה עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion). עבור ההסתברות המשתמעת לחדלות פירעון, אפשר פשוט להציב את הפרמטרים במשוואה (25). עם זאת, עבור ההסתברות בפועל לחדלות פירעון, אנחנו צריכים לחשב את הדלתא, התטא והגמא של ההון העצמי,

[27] האומדן האמיתי לתנודתיות ההון העצמי הוא זה שחושב משימוש בנתונים היסטוריים שנמדדו מסדרת נתונים עתית של תשואת המניה.

ולאחר מכן להציב את הפרמטרים האלה, ביחד עם אחרים, במשוואה (21) על מנת לחשב את תוחלת התשואה על נכסי הפירמה. ממשוואה (26) נקבל את ההסתברות בפועל לחדלות פירעון של כל אחת מהפירמות. אך במאמר זה, אנחנו עוסקים אך ורק בהסתברות המשתמעת לחדלות פירעון.

ג. <u>ניתוח הנתונים</u>

בנספחים א, ב ו- ג, תיעדנו את כל הפרמטרים שהוזכרו לעיל. בכל שלושת הנספחים, ניתן לראות בקלות שתנודתיות ההון העצמי תמיד גבוהה יותר מתנודתיות נכסי הפירמה. תוצאות אלו נובעות ממבנה ההון של הפירמה לפיו, שווי נכסי הפירמה מורכב משווי ההון העצמי וההתחייבויות, והוא תמיד גדול מאפס. ניתן גם לראות שה- IDP משתנה מפירמה אחת לשנייה. כעת ננתח את התוצאות על פי הגודל והענפים שלהן.

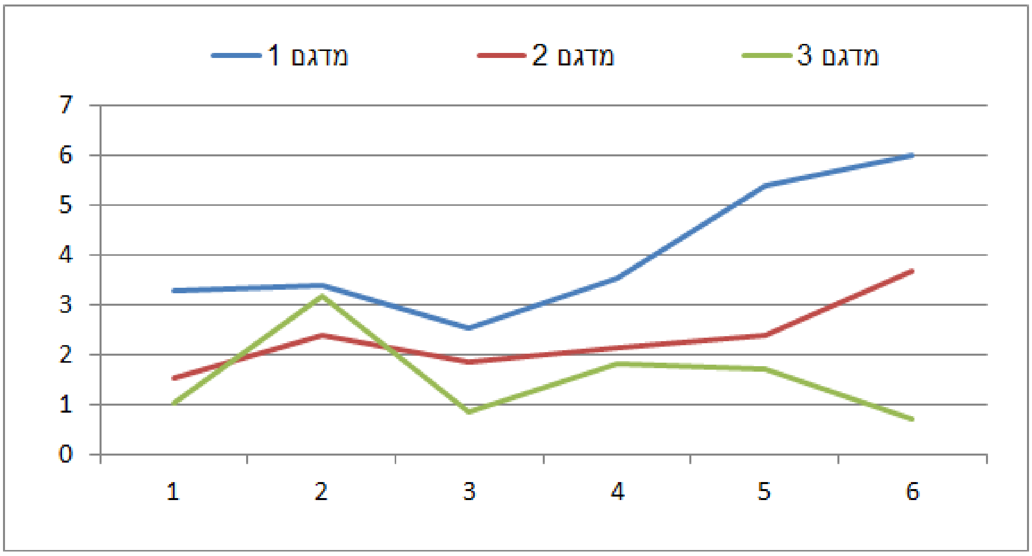
1) <u>DD ו- IDP</u>

תחילה, נסתכל על הגודל. סיווגנו את 18 הפירמות לשלושה מדגמים (ראה תרשים 7). על פי גודלן, קראנו לגדולות, לבינוניות ולקטנות, בשם מדגם אחד, מדגם שתיים ומדגם שלוש, בהתאמה. כעת נדון בנתוני 18 הפירמות בשנת 2013.

מדגם 1		מדגם 2		מדגם 3	
DD	IDP	DD	IDP	DD	IDP
3.2747	5.29E-04	1.5056	6.61E-02	1.0202	1.54E-01
3.3684	3.78E-04	2.3695	8.91E-03	3.1615	7.85E-04
2.5269	5.75E-03	1.8294	3.37E-02	0.8518	1.97E-01
3.5282	2.09E-04	2.1387	1.62E-02	1.8087	3.52E-02
5.3651	4.05E-08	2.3818	8.61E-03	1.6838	4.61E-02
6.0040	9.63E-10	3.6649	1.24E-04	0.7123	2.38E-01

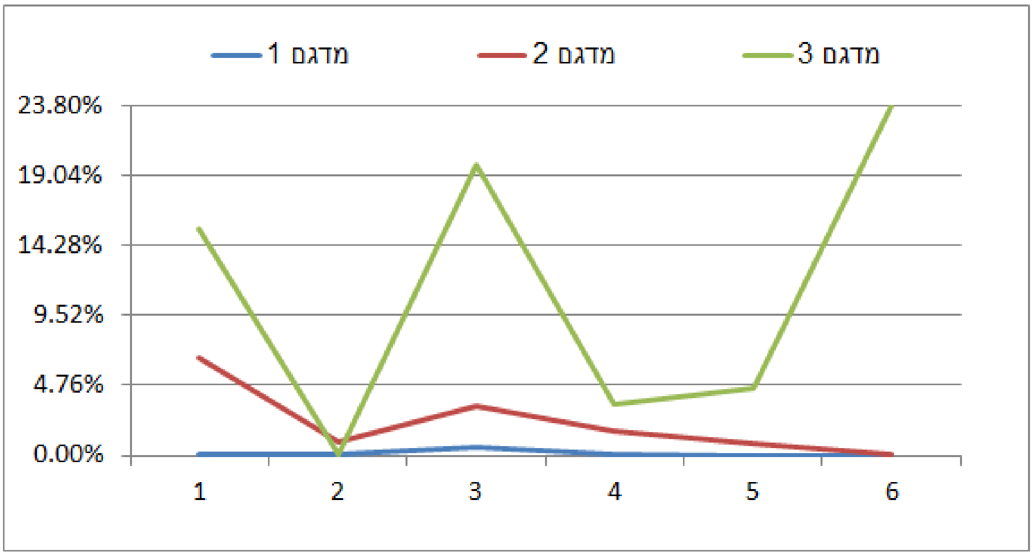
תרשים 7: DD ו- IDP בשלושת המדגמים של שנת 2013

באופן כללי, לפירמות הגדולות יש פחות סיכוי להגיע למצב של חדלות פירעון, ולפירמות הקטנות יש יותר סיכוי להגיע למצב של חדלות פירעון. הסיכוי של הפירמות הבינוניות להגיע למצב של חדלות פירעון נמצא בין הסיכוי של הגדולות לבין הסיכוי של הקטנות. ה-DD מוצג כמספר סידורי המצביע על ההסתברות לחדולת פירעון. תרשים 8, מציג את היחס הישר שבין ה- DD לבין גודל הפירמה. גם אם נסתכל על ה- DD הממוצע של הפירמות, נקבל שה- DD הממוצע של הפירמות הגדולות הינו 4.01, של הפירמות הבינוניות הוא 2.31 ושל הפירמות הקטנות הוא 1.54. נתונים אלו משקפים גם כן את היחס הישר שבין ה- DD לבין גודל הפירמה.



תרשים 8: השוואת ה- DD בין שלושת המדגמים של שנת 2013

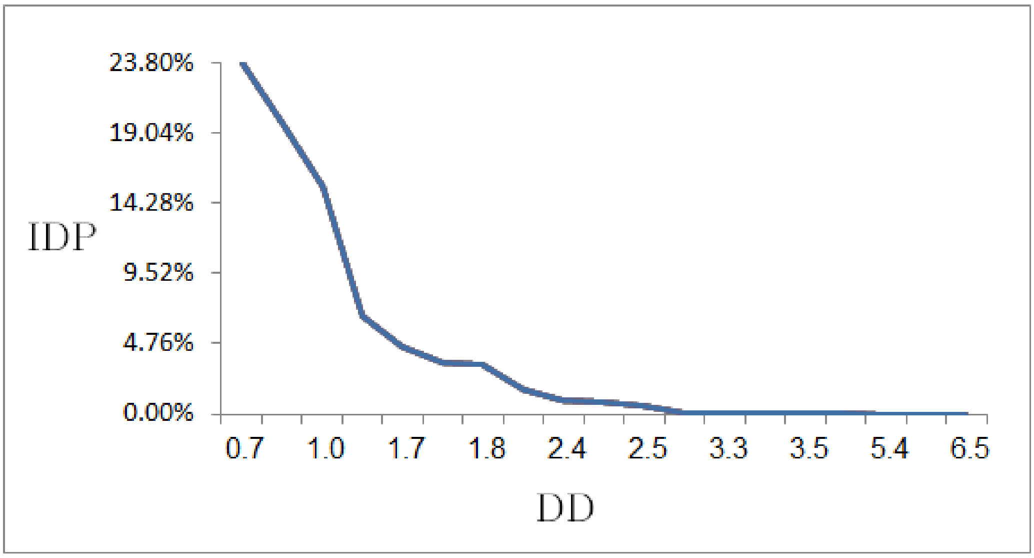
תרשים 9 מראה שה- IDP הוכיח את תפקידו להצביע על הבדלים בהסתברות לחדלות פירעון, אך הוא ממלא תפקיד של מספר סידורי בלבד. תרשים 9, מציג את היחס ההפוך שבין ה- IDP לבין גודל הפירמה. גם אם נסתכל על ה- IDP הממוצע של הפירמות, נקבל שה- IDP הממוצע של הפירמות הגדולות הינו 0.11%, של הפירמות הבינוניות הוא 2.23% ושל הפירמות הקטנות הוא 11.19%. נתונים אלו משקפים גם כן את היחס ההפוך שבין ה- IDP לבין גודל הפירמה.



תרשים 9: השוואת ה- IDP בין שלושת המדגמים של שנת 2013

תרשים 10 מציג את הקשר שבין ה- DD ל- IDP בקרב 18 פירמות ומצביע על יחס הפוך בין ה- DD ל- IDP, מה שמאשר את תוצאות המחקרים של Moody's (ראה [3]). יתר על כן, ניתן לראות כי היחס ההפוך ברור יותר לפני שה- DD מגיע ל- 3.0. לאחר נקודה קריטית זו,

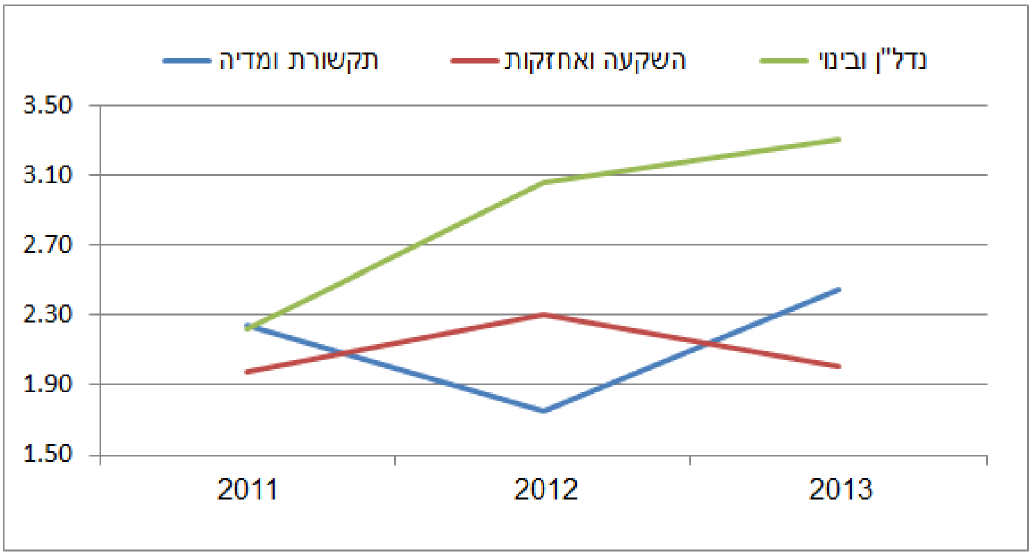
מערכת היחס הופך להיות קו ישר, שאינו רגיש לשינויים ב- DD. עובדה זו מצביעה על כך שכאשר ה- DD מגיע לנקודות מסוימות, יכולת החיזוי שלו לגבי ה- IDP נפגעת, וכתוצאה מכך ה- IDF שמתקבל אינו מדויק מספיק.



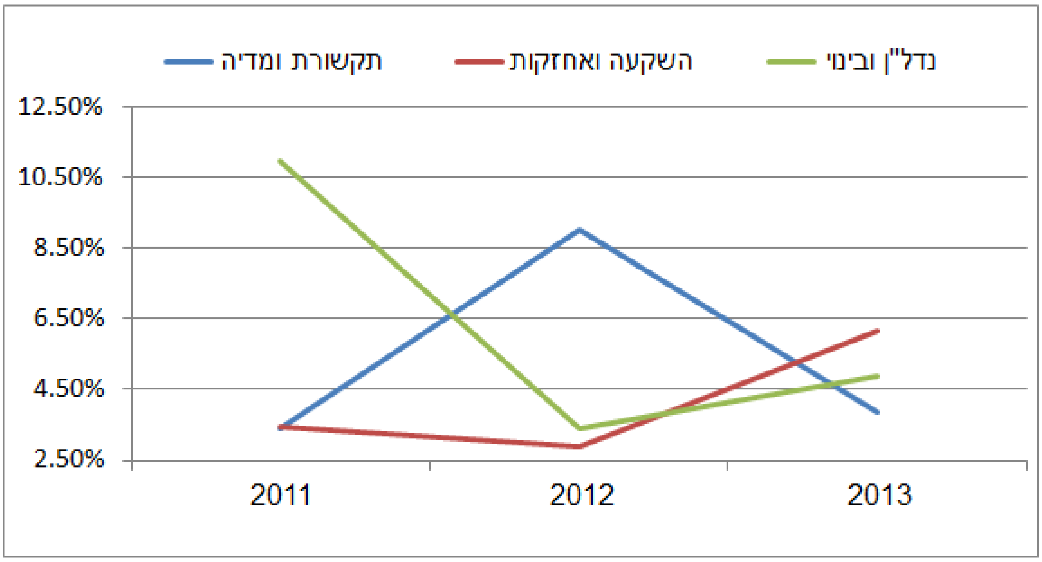
תרשים 10: הקשר בין ה- DD ל- IDP בשנת 2013

2) <u>**DD ותנודתיות נכסי הפירמה**</u>

כעת, נתמקד בענף. תרשים 11 ותרשים 12 מציגים את ה- DD הממוצע וה- IDP הממוצע בכל שנה, בהתאמה. באופן לא מפתיע, ה- DD וה- IDP משתנים בתוך כל אחד מהענפים. זאת תודות לתנודתיות נכסי הפירמה של כל אחד מהענפים, אשר מקפלת בתוכה את המאפיינים הכלכליים השונים. מחישובינו עולה כי יש יחס הפוך בין תנודתיות נכסי הפירמה לבין ה- DD.



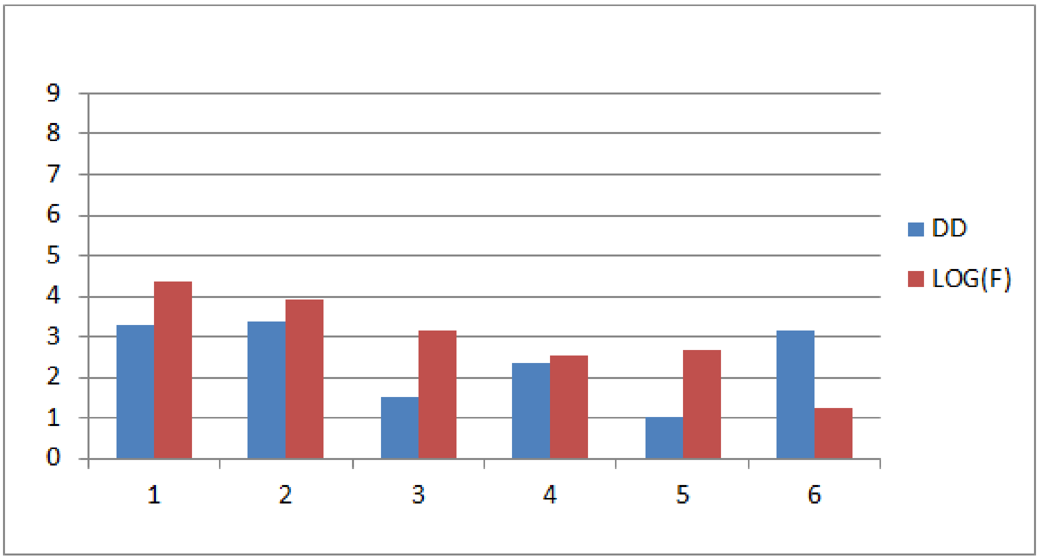
תרשים 11: השוואת ה- DD הממוצע



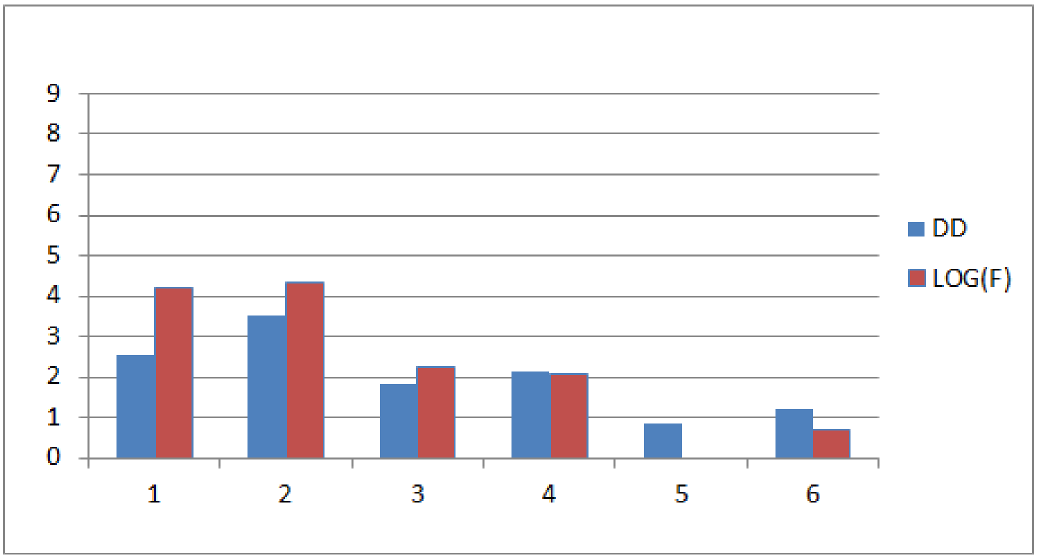
תרשים 12: השוואת ה- IDP הממוצע

3) <u>DD ושווי נכסי הפירמה</u>

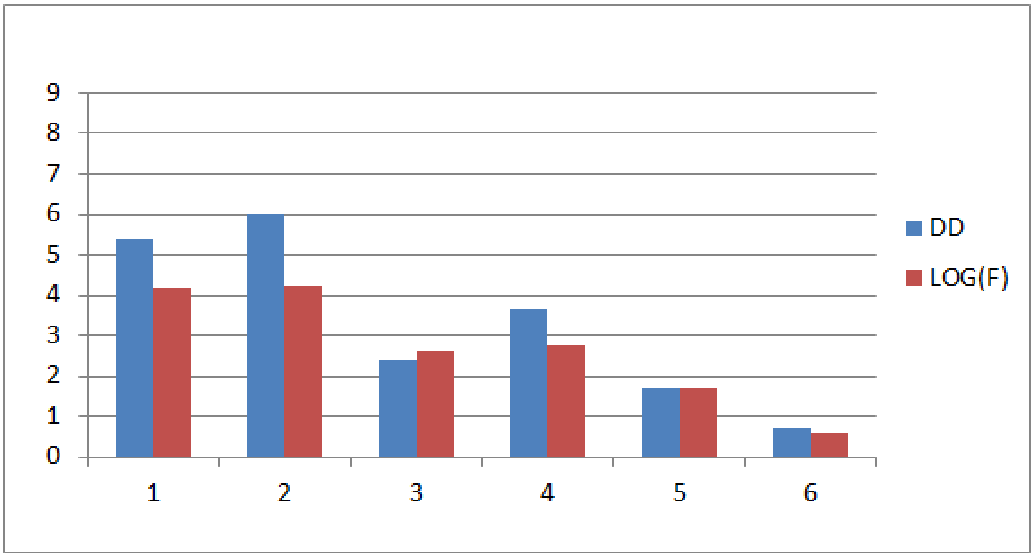
תרשימים 13, 14 ו- 15 מציגים את הקשר שבין ב- DD ושווי נכסי הפירמה בשלושת הענפים. על מנת להקל על ההשוואה השתמשנו ב- $Log(F)$, המייצג את הלוגריתם של שווי נכסי הפירמה. ניתן לראות שלא משנה באיזה ענף מדובר, ככל ששווי נכסי הפירמה גדול יותר כך המרחק לחדלות פירעון רב יותר. לשון אחר, ככל ששווי נכסי הפירמה גדול יותר כך יש פחות סיכוי שהפירמה תגיע למצב של חדלות פירעון.



תרשים 13: Log(F) ו- DD בענף התקשורת והמדיה בשנת 2013



תרשים 14: Log(F) ו- DD בענף ההשקעה והאחזקות בשנת 2013



תרשים 15: Log(F) ו- DD בענף הנדל"ן והבינוי בשנת 2013

ד. <u>דיון בממצאים</u>

מודל KMV-Merton הוא המודל המבני, הנשען על הרעיון הבסיסי של מודל Merton. לאמור- יש לו את התיאוריה הקונקרטית של מודל Merton כדי לתמוך בו ובנוסף הוא ומשתמש בשווי השוק של הון עצמי ובנתונים פיננסיים כתשומות. במובן מסוים, הוא מספק תוצאות מהימנות להערכת סיכון האשראי של הפירמה. הדוגמאות לעיל הסבירו היטב את תפקידם. עם זאת, בניגוד לצפיותינו המוקדמות הן אינן מדויקות.

כשנגזרנו את ההסתברות המשתמעת לחדלות פירעון של הפירמה, הסתמכנו על ההנחה ששווי נכסי הפירמה עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian

Motion). ברם, ההתפלגות הנורמלית הינה בחירה גרועה להגדרת ההסתברות לחדלות פירעון (ראה [3]). חברת Moody's משתמשת במסד הנתונים הנתונים הסטטיסטיים הגדול שלה המבוסס על תצפיות עבר בנוגע לשיעורי Default, על מנת למצוא את הקשר שבין המרחק לחדלות פירעון לבין ההסתברות לחדלות פירעון. יחד עם זאת, עלינו לשאול האם מסד הנתונים הגדול שממנו מסיקה חברת Moody's על ההסתברויות לחדלות פירעון הוא באמת מספיק על מנת ליישמו על שוק אחר וכן האם נכון להתייחס לנקודת חדלות הפירעון כאל מספר מסוים, כאשר ברור לנו למעשה שהיא משתנה מקרי (ראה [3]). מלבד הסיבות הסובייקטיביות הללו, ישנן גם כמה סיבות אובייקטיביות אחרות. הן גם תורמות לרמת הדיוק של הערכת סיכון האשראי של הפירמה. למרות שה- DD מתקבל על ידי חישוב שווי ההון העצמי, שנקבע לחלוטין על ידי השוק וכולל בחובו את המאפיינים הכלכליים של החברה, עדיין אין אנו יכולים להבטיח כי שווי ההון העצמי משקף את השווי האמיתי של הפירמה.. ישנן מספר סיבות לכך, אך ההחשובה ביותר היא במקרה שבו במקרה הנתונים החשבונאיים אינם מהימנים ומטעים את האפקטיביות של שוק המניות. עבור ענפים מסוימים ופירמות ציבוריות מסוימות, המודל עשוי שלא לפעול בצורה חלקה. לדוגמא, משבר ה- Subprime גרם לצרות בבנק המשכנתאות Northern Rock. סיפורו של הבנק הסתיים בהתערבות של הממשלה. אירועים כאלה קורים כמעט בכל ענף בפירמות שלהן השפעות חברתיות ופוליטיות חזקות. במצבים אלה, כוחות חיצוניים (הממשלה) מצילים את הפירמה מחדלות הפירעון. החלק הקריטי ביותר הוא שאנחנו לא יכולים רק להשתמש בשיעור ריבית חסרת סיכון כאומדן לתוחלת התשואה על הפירמה. במקום זאת, עלינו להשתמש בתוחלת התשואה על הפירמה באמצעות כמה מתודולוגיות.

5. סיכום ומסקנות

מאמר זה מתאר את הרעיון הבסיסי של KMV תחת שני מודלים שונים ומרחיב את מודל KMV-Merton כך שיתאים לפירמה שלה שני סוגים של חוב. בנוסף, יישמנו את מודל KMV-Merton על מספר פירמות בישראל בשלושה ענפים שונים על פני התקופה 2011-2013.

על ידי בחינת הנתונים האמיתיים, נראה שלמודל KMV-Merton יש יכולת לחזות את חדלות הפירעון של הפירמה, ובנוסף התוצאות מאשרות את טענתה של חברת KMV ליחס הפוך בין ההסתברות לחדלות פירעון והמרחק לחדלות פירעון. עם זאת, הניתוח שלנו מצביע על כך שהמודל שימושי יותר לאמידת דירוג אשראי של פירמות מאשר לאמידת ההסתברות לחדלות פירעון. תוצאה זו נגרמת בחלקה על ידי ההנחה ששווי הפירמה עוקב תהליך סטוכסטי הכולל תנועה בראונית גיאומטרית (Geometric Brownian Motion). עם זאת, המודל שאנחנו מיישמים מצליח למצוא קשר בין המרחק לחדלות פירעו (DD), תנודתיות נכסי הפירמה ושווי נכסי הפירמה.

אנו מכירים בכך שהיישום שלנו למודל KMV-Merton אינו זהה לזה שחברת Moody's מיישמת, ולכן מודל VK (קרי, מודל Moody's-KMV) יפיק ככל הנראה תוצאות טובות יותר מאלו שהתקבלו במאמר זה.

6. הפניות

[1] Merton, R.C.: "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates", The Journal of Finance, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470, 1974.

[2] Arora, N., Bohn, J.R. and Zhu, F.: "Reduced Form vs. Structural Models of Credit Risk: A Case Study of Three Models", Research Paper, Moody's KMV, 2005.

[3] Crosbie, P.J. and Bohn, J.R.: "Modeling Default Risk", Research Paper, Moody's KMV, 2002.

[4] Kealhofer, S. and Kurbat, M.: "Benchmarking Quantitative Default Risk Models: A Validation Methodology", Research Paper, Moody's KMV, 2000.

[5] Bharath, S.T. and Shumway, T.: "Forecasting Default with the KMV-Merton Model", Working Paper, The University of Michigan, 2004.

[6] Black, F. and Scholes, M.: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-659, 1973.

[7] Dwyer, D. and Qu, S.: "EDF™ 8.0 Model Enhancements, Research Paper", Moody's KMV, 2007.

[8] McKean, H.P., 1969, Stochastic Integrals, New York, Academic Press.

[9] Delianedis, G. and Geske, R.: "Credit Risk And Risk Neutral Default Probabilities - Information About Rating Migrations And Defaults", EFA 2003 Annual Conference Paper, No. 962, 2003.

[10] EDF Case Study: Worldcom, Moody's KMV, 2003.

[11] EDF Case Study: Enron, Moody's KMV, 2002.

[12] Hull, J., 2002, Options, Futures, and Other Derivatives, Fifth Edition, International Edition, Prentice Hall.

[13] אתר הבורסה לני״ע בתל אביב, http://www.tase.co.il/

[14] אתר בנק ישראל, http://www.boi.org.il/

[15] אתר מאי״ה, http://maya.tase.co.il

7. **נספחים**

א. **ענף התקשורת והמדיה**

IDP	DD	F (במיליונים)	σ_F	DP (במיליונים)	E (במיליונים)	σ_E	שנה	פירמה	
5.29E-04	3.2747	23,336.3	0.2082	7,365.5	16,066.8	0.3023	2013	בזק	מדגם אחד
1.38E-03	2.9931	19,455.0	0.1972	7,996.5	11,634.7	0.3297	2012		
6.60E-04	3.2114	27,174.7	0.2149	8,483.0	18,946.5	0.3082	2011		
3.78E-04	3.3684	8,182.7	0.1789	3,243.0	4,982.0	0.2938	2013	פרטנר	
1.05E-02	2.3092	7,009.0	0.2106	3,600.5	3,488.0	0.4234	2012		
4.12E-04	3.3449	9,386.1	0.1651	4,275.5	5,239.0	0.2957	2011		
6.61E-02	1.5056	1,368.8	0.0692	1,239.5	147.4	0.6749	2013	סקיילקס	מדגם שתיים
1.88E-01	0.8840	2,398.2	0.0585	2,321.5	140.6	1.1969	2012		
1.67E-02	2.1273	2,597.2	0.0815	2,206.0	458.0	0.4658	2011		
8.91E-03	2.3695	339.9	0.3489	56.2	284.5	0.4169	2013	אן טי אס	
5.85E-02	1.5673	174.4	0.4386	50.6	124.9	0.6130	2012		
1.02E-01	1.2715	106.6	0.4634	40.6	67.5	0.7389	2011		
1.54E-01	1.0202	479.9	0.0574	457.0	30.8	1.0341	2013	סאני	מדגם שלוש
2.64E-01	0.6316	442.8	0.2298	377.0	85.3	1.4562	2012		
5.74E-02	1.5774	481.6	0.3025	248.0	241.4	0.6078	2011		
7.85E-04	3.1615	17.0	0.1880	6.8	10.2	0.3126	2013	תפוז	
1.75E-02	2.1093	22.6	0.2990	8.2	14.6	0.4623	2012		
2.79E-02	1.9129	36.2	0.3751	9.8	26.7	0.5092	2011		

ב. **ענף ההשקעה והאחזקות**

IDP	DD	F (במיליונים)	σ_F	DP (במיליונים)	E (במיליונים)	σ_E	שנה	פירמה	
5.75E-03	2.5269	15,511.5	0.3564	1,465.5	14,065.1	0.3931	2013	חברה לישראל	מדגם אחד
3.57E-04	3.3844	20,304.6	0.2719	1,594.0	18,745.8	0.2945	2012		
1.43E-02	2.1899	19,732.7	0.4210	1,454.0	18,322.4	0.4534	2011		
2.09E-04	3.5282	20,628.3	0.2123	5,127.0	15,568.2	0.2813	2013	דלק קבוצה	
2.72E-03	2.7800	15,745.6	0.2234	5,950.0	9,926.7	0.3544	2012		
2.16E-02	2.0223	13,488.8	0.2907	5,494.5	8,159.8	0.4807	2011		
3.37E-02	1.8294	171.6	0.2231	100.4	72.6	0.5300	2013	קבוצת נץ	מדגם שתיים
4.91E-02	1.6541	125.1	0.2544	71.8	55.1	0.5829	2012		
1.09E-01	1.2299	111.0	0.1510	92.1	22.2	0.8097	2011		
1.62E-02	2.1387	123.4	0.2506	56.2	67.9	0.4556	2013	קווינקו	
7.98E-02	1.4062	134.3	0.3272	70.3	65.8	0.6769	2012		
5.02E-03	2.5747	228.5	0.2774	64.8	165.6	0.3826	2011		
1.97E-01	0.8518	0.9	0.2461	0.7	0.2	1.1184	2013	יורו אוברסיז	מדגם שלוש
2.51E-03	2.8055	3.3	0.2131	1.3	2.0	0.3511	2012		
3.52E-02	1.8087	4.2	0.4316	0.9	3.4	0.5394	2011		
1.17E-01	1.1892	4.9	0.3093	3.0	2.0	0.7978	2013	די רום	
3.78E-02	1.7771	10.1	0.4490	1.9	8.2	0.5494	2012		
2.08E-02	2.0366	10.3	0.4816	0.2	10.2	0.4900	2011		

ג. **ענף הנדל"ן והבינוי**

IDP	DD	F (במיליונים)	σ_F	DP (במיליונים)	E (במיליונים)	σ_E	שנה	פירמה	
4.05E-08	5.3651	14,799.5	0.1029	6,682.5	8,204.1	0.1856	2013	גזית גלוב	מדגם אחד
1.41E-05	4.1872	14,433.4	0.1317	6,563.5	8,014.5	0.2372	2012		
3.37E-03	2.7097	12,213.0	0.1773	6,440.0	5,966.5	0.3629	2011		
9.63E-10	6.0040	16,922.2	0.1375	2,966.0	13,994.9	0.1662	2013	עזריאלי קבוצה	
1.89E-06	4.6227	13,780.5	0.1819	2,202.6	11,626.4	0.2157	2012		
1.62E-04	3.5954	13,194.3	0.2288	2,350.4	10,914.5	0.2766	2011		
8.61E-03	2.3818	424.0	0.1059	319.4	108.8	0.4138	2013	דוניץ	מדגם שתיים
7.44E-04	3.1771	434.4	0.0681	347.3	94.7	0.3122	2012		
1.95E-02	2.0650	387.1	0.0988	316.1	80.6	0.4785	2011		
1.24E-04	3.6649	572.0	0.0647	441.2	136.6	0.2710	2013	צמח המרמן	
7.29E-05	3.7982	478.8	0.0470	401.7	85.9	0.2619	2012		
8.12E-04	3.1516	386.2	0.0751	303.1	92.2	0.3145	2011		
4.61E-02	1.6838	49.8	0.1088	41.0	9.4	0.5899	2013	מלרג	מדגם שלוש
9.10E-02	1.3344	52.5	0.1066	45.8	7.9	0.7567	2012		
6.15E-01	-0.2925	59.2	0.3175	63.5	6.5	5.6057	2011		
2.38E-01	0.7123	3.8	0.6684	1.6	2.3	1.1740	2013	כהן-ממ	
1.12E-01	1.2149	20.6	0.5652	5.6	15.1	0.7736	2012		
1.85E-02	2.0861	23.2	0.2725	10.0	13.6	0.4666	2011		