

מבוא למתמטיקה לינארית ולאלגברה של מטריצות

לאחר מספר מאמרים שפרסמתי בנושא למידת מכונה, קיבלתי פניות מבוגרי תוכניות הכשרה של דאטה סיינטיסט על ידי גופים שונים (בתי ספר פרטיים או חברות העוסקות באנליזות מתקדמות ובפיתוח מודלים) בבקשה לכתוב על אלגברה של וקטורים ומטריצות (כולל חיבור וחסור מטריצות); מניפולציות על מטריצות; מטריצה משוחלפת (Transposed Matrix) וההופכי של מטריצה ריבועית; סוגים מיוחדים של מטריצות וחוקי אלגברה של מטריצות; פירוק צ'ולסקי (Cholesky Decomposition) של מטריצה; ערכים עצמיים (Eigenvalues) ווקטורים עצמיים (Eigenvectors). הבעיה היא שמרבית מבוגרי תוכניות ההכשרה הללו אינם מבינים ואינם יודעים לבצע יישומים פיננסיים נפוצים כמו מניפולציה על מטריצת שוניות משותפות (Covariance Matrices), חישוב שונות התשואות של תיק נכסים, גידור פוזיציה באופציית ונילה וסימלון (Simulating, תרחוש) מערכי תשואות מתואמים.

בעת בחינת התשואות והסיכונים הכרוכים בהחזקת תיקי ניירות ערך אנו מגלים כי מדובר במתמטיקה לינארית ולא-לינארית כאחד. באופן מפתיע, טכניקות הקשורות למתמטיקה לינארית, במיוחד אלגברה של מטריצות, מפשטות את הטיפול בהיבטים הלא-לינאריים, למשל בעת חישוב שונות התשואות של תיק. שונות זו הינה פונקציה ריבועית של שקלול הנכסים, אך אנו מטפלים בה באמצעות שימוש במטריצת השונות המשותפת. בנוסף, מקובל לעשות שימוש במטריצות על מנת לפתור משוואות סימולטניות. יישום זה נדרש במיוחד בעולמות ההשקעות וניהול הסיכונים.

פונקציה או תהליך יחשבו ללינאריים אם, למשל, כמות כפולה של משתנה הכניסה (Input) מייצרת כמות כפולה של משתנה היציאה (Output). ואם משתנה היציאה המתקבל מסך הצברם של שני משתני כניסה שווה לסך הצברם של משתני היציאה של כל אחד ממשתני הכניסה.

לפיכך, לינאריות עוטפת את המידתיות (Proportionality). לדוגמא, התשואה של תיק המורכב משני נכסים הינה פונקציה לינארית של התשואות של כל אחד מהנכסים:

$$R_p = wR_1 + (1 - w)R_2$$

כאשר R_p מייצג את התשואה (הבדידה) של תיק, R_1 ו- R_2 מייצגים את התשואות של הנכסים, ו- w ו- $1 - w$ מייצגים את הפרופורציות המושקעו בכל נכס. מאידך, סטיית התקן של התשואות אינה לינארית שכן סטיית התקן של תשואות התיק היא השורש הריבועי של פונקציה ריבועית של w , סטיות התקן והמתאם (Correlation) בין הנכסים. באופן כללי:

$$F \text{ linear} \leftrightarrow F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

כאשר אותיות יווניות מייצגות מספרים (קרי, סקלארים) ואילו אותיות מודגשות מייצגות וקטורים. אמנם ישנם פונקציות ותהליכים רבים שהם לינאריים, אך ישנם רבים אחרים שאינם. לדוגמא, פונקציית הלוגריתם הטבעי איננה פונקציה לינארית:

$$\ln(1) = 0, \ln(e) = 1, \ln(1 + e) \approx 1.313262, \text{ so } \ln(1 + e) \neq \ln(1) + \ln(e)$$

פרטים אודות כותב המאמר: האקטואר רועי פולניצר, FRM

רועי בעל תואר שני במימון (התמחות בניהול סיכונים ואקטואריה) ותואר ראשון בכלכלה (התמחות במימון), שניהם מאוניברסיטת בן-גוריון בנגב, בעל דיפלומה בניהול סיכונים פיננסיים (FRM®) מאוניברסיטת אריאל בשומרון ולמד בתוכנית ללימודי תעודה באקטואריה באוניברסיטת חיפה. כמו כן, רועי אקטואר מלא



(Fellow) בלשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (F.I.L.A.V.F.A.), מוסמך כמעריך שווי מימון תאגידי (CFV) מטעם לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל

(IAVFA), מוסמך כמנהל סיכונים פיננסיים (FRM) מטעם האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP) ומוסמך כמומחה לניהול סיכונים (CRM) מטעם האיגוד הישראלי למנהלי סיכונים (IARM).

לרועי ניסיון של מעל ל- 15 שנה בביצוע ניתוחים כמותיים במכשירים פיננסיים, בהערכת שווי תאגידים ונכסים בלתי מוחשיים, באמידה וכימות סיכונים כמו תמותה, אריכות ימים, תחלואה, ביטולים והחלמה מנכות, ובמידול ומדידת סיכונים שוק, אשראי, תפעוליים, מודל, נזילות והשקעות לצורכי יישום הוראות רגולטוריות ותקינה חשבונאית, פיתוח, יישום ותיקוף מודלים בתחומים של הערכות שווי, ניהול סיכונים, אקטואריה והנדסה פיננסית, קביעת תעריפי ביטוח חיים, הערכת פרמיות סיכון והערכת עתודות ביטוח, קביעת עלות תנאי פנסיות (צוברות ותקציביות) והכנת מאזנים אקטואריים לקרנות פנסיה, ניתוח וחזוי מצבים פיננסיים מורכבים וכן העברת סמינרי הדרכה והשתלמויות בתחומי התמחותו: מימון, אקטואריה, הערכות שווי, בנקאות, ניהול סיכונים, אופציות והנדסה פיננסית.

ניסיונו של רועי בתחום האלגברה הלינארית כולל: מערכות משוואות לינאריות, וקטורים ב- R^n , מטריצות ריבועיות, מטריצות אלמנטריות, מרחבים וקטורים, מרחבי מכפלה פנימית, אורתוגונליות, דטרמיננטות, ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון, תבניות ריבועיות ומשוואות הפרשים.

ניסיונו של רועי בתחום האנליזה, כולל: תכונות טופולוגיות של קבוצות במרחב אוקלידי, קבוצות קמורות, משפטי הפרדה, פונקציות קמורות וקעורות, תכונות ואפיונים, שנאת סיכון, אופטימיזציה של פונקציות עם ובלי אילוצים, משפט הפונקציות הסתומות, משפט המעטפת, משוואות דיפרנציאליות מסדרים שונים, מערכות של משוואות דיפרנציאליות ושיטות של אופטימיזציה דינאמית.